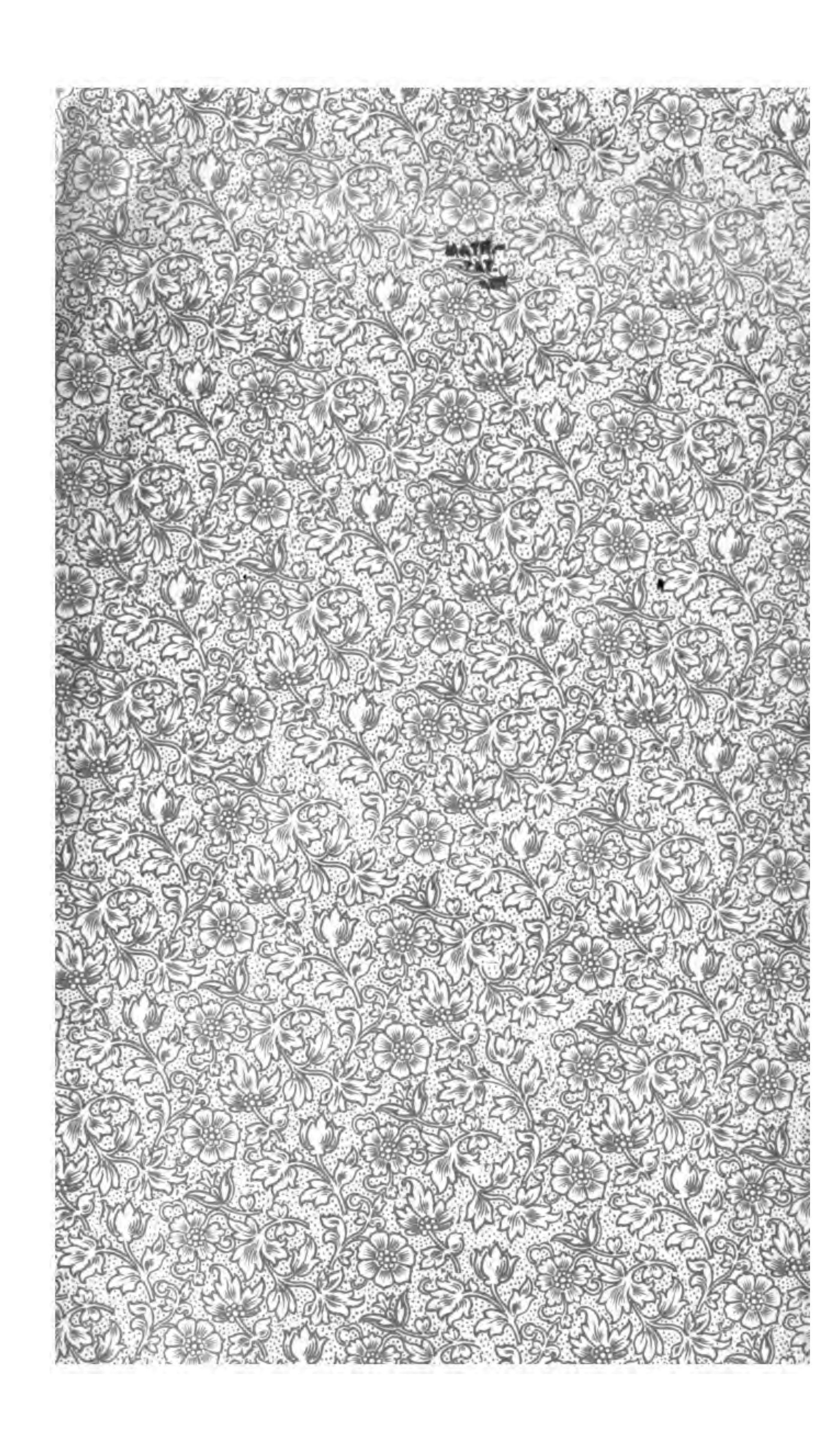








Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

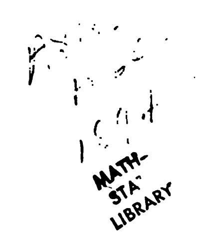
k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).


MATH-
STAT.
LIBRARY

Uebersicht
des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXIV
Jahrgang 1894.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 135. Stiftungstages am 28. März 1894.

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinz-Regenten am 15. November 1894.

Sitzung vom 13. Januar 1894.

Sitzung vom 3. Februar 1894.

Sitzung vom 3. März 1894.

Sitzung vom 5. Mai 1894.

Sitzung vom 2. Juni 1894.

Sitzung vom 7. Juli 1894.

Sitzung vom 3. November 1894.

Sitzung vom 1. Dezember 1894.



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 13. Januar 1894.

1. Herr L. Boltzmann legte eine Abhandlung des Herrn Dr. F. Richarz, Privatdocenten an der Universität Bonn: „Ueber die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome“ vor, unter Besprechung der hauptsächlichsten Resultate derselben.

2. Herr Gustav Bauer überreicht der Classe, ebenfalls unter Mittheilung der wesentlichen Ergebnisse, eine Abhandlung des Herrn Dr. Karl Döhlemann, Privatdocenten für Mathematik an der hiesigen Universität: „Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation dritter Ordnung“.



Ueber die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome.

Von Dr. F. Richarz,
Privatdocent an der Universität Bonn.

(Eingelaufen 13. Januar.)

In den Sitzungen der Niederrheinischen Gesellschaft in Bonn vom 1. Dezember 1890[1]) und vom 12. Januar 1891[2]) habe ich einige Betrachtungen vorläufig mitgetheilt, welche an die elektrochemische Theorie in derjenigen Form anknüpfen, die ihr durch Herrn H. von Helmholtz in einer Reihe von Abhandlungen aus den Jahren 1873 bis 1882, am ausführlichsten in seiner Rede zu Faraday's Gedächtniss gegeben wurde.[3]) Meine Ausführungen betrafen die elektrische Wirkung ultravioletten Lichtes, die elektrolytische Leitung der Gase, das elektrische Elementarquantum, die die zwischen den Atomen einer Molekel wirksamen elektrostatischen, elektrodynamischen und Gravitationskräfte, die chemische Wärmeentwicklung insbesondere die Dissociationswärme (für Untersalpetersäure und für Joddampf), die Erregung elektrodynamischer Wellen durch periodische Bewegung der Valenzladungen und endlich eine Anwendung der kinetischen Theorie mehratomiger Gase von Herrn Boltzmann[4])

1) F. Richarz, Sitzber. der Niederrh. Ges. 47, p. 113, 114; 1890.

2) F. Richarz, Sitzber. der Niederrh. Ges. 48, p. 18—32; 1891.

3) H. v. Helmholtz, Journ. chem. Soc. June. 1881. Vorträge u. Reden II, p. 275.

4) L. Boltzmann, Sitzber. d. Wiener Akad., mathem. Cl., 63, p. 417, 1871.

und des Clausius'schen Virialsatzes auf die intramolekulare Bewegung. In anderer Anordnung habe ich über einen Theil dieser Betrachtungen am 26. Juni 1891 in der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin vorgetragen.[1])

Weiterhin schien es dann zweckmässig, bei der ausführlichen Wiedergabe der erwähnten Schlussfolgerungen, von der ich durch andere Arbeit lange abgehalten wurde, strenger zu trennen, was schon vor Einführung der elektrochemischen Theorie abzuleiten war, was erst nach Einführung derselben. Jenes sind die aus der Anwendung des Virialsatzes auf die kinetische Theorie der Materie zu ziehenden Schlüsse in Bezug auf mehratomige Gase[2]) und in Bezug auf das Gesetz von Dulong und Petit.[3]) In ersterer Arbeit ergab sich insbesondere eine von der elektrochemischen Theorie unabhängige Beziehung zwischen Dissociationswärme und Druck, welche (wie früher die aus der elektrochemischen Theorie und der Dissociationswärme gezogenen Schlüsse) bei Untersalpetersäure und Joddampf und ausserdem auch bei der Dissociationswärme des Wasserstoffs nach Herrn E. Wiedemann's Messungen[4]) sich bestätigt fand.

Im Folgenden sind die an die Helmholtz'sche Theorie angeknüpften Betrachtungen ausführlich im Zusammenhang wiedergegeben und der letzte Abschnitt über den molekularen Magnetismus neu hinzugefügt. Während der Niederschrift erschien die Arbeit von Herrn H. Ebert über die Dissociationswärme in der elektrochemischen Theorie.[5])

---

1) F. Richarz, Verh. Phys. Ges. Berlin 10, p. 73—79; 1891.

2) F. Richarz, Wiedem. Ann. 48, p. 467—492; 1893.

3) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 708—716; 1893.

4) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10, p. 253, 1880; 18, p. 509, 1883; Ostwald, Allgem. Chemie 2, p. 49.

5) H. Ebert, Wied. Ann. 50, p. 255—260; 1893.

I. Elektrochemische Theorie nach Helmholtz.

Die Helmholtz'sche Form der elektrochemischen Theorie hat folgenden wesentlichen Inhalt.[1])

Faraday's Gesetz von der festen elektrolytischen Wirkung lässt sich in Verbindung mit Kekulé's Theorie von der chemischen Valenz dahin zusammenfassen, „dass dieselbe Menge Elektricität, wenn sie durch einen Elektrolyten fliesst, immer dieselbe Menge von Valenzwerthen an beiden Elektroden entweder frei macht, oder in andere Verbindungen überführt". Nimmt man die von Herrn Hittorf und Herrn F. Kohlrausch nachgewiesenen Gesetze der Jonenwanderung hinzu, so kann man dem Faraday'schen Gesetze die Form geben: „durch jeden Querschnitt eines Elektrolyten findet immer äquivalente elektrische und chemische Bewegung statt. Genau dieselbe bestimmte Menge, sei es positiver, sei es negativer Elektricität bewegt sich mit jedem einwerthigen Jon, oder mit jedem Valenzwerth eines mehrwerthigen Jon, und begleitet es unzertrennlich bei allen Bewegungen, die dasselbe durch die Flüssigkeit macht".

Bei Hinzunahme der Atomtheorie führt dieses Resultat zu einer Folgerung, welche Herr H. v. Helmholtz so ausspricht: „Wenn wir Atome der chemischen Elemente annehmen, so können wir nicht umhin, weiter zu schliessen, dass auch die Elektricität, positive sowohl wie negative, in bestimmte elementare Quanta getheilt ist, die sich wie Atome der Elektricität verhalten. Jedes Jon muss, solange es sich in der Flüssigkeit bewegt, mit je einem elektrischen Aequivalent für jeden seiner Valenzwerthe vereinigt bleiben. Nur an den Grenzflächen der Elektroden kann eine Trennung eintreten: wenn dort eine hinreichend grosse elektromotorische

---

1) Vergl. F. Richarz, l. c. und Naturw. Rundschau 6, Nr. 49 und 50; 1891.

Kraft wirkt, dann können die Jonen ihre bisherige Elektricität abgeben und elektrisch neutral werden."

„Wenn die vorher positiv geladenen Atome von Wasserstoff oder irgend einem andern Kation aus ihrer Verbindung ausscheiden und sich gasförmig entwickeln, so ist das entwickelte Gas elektrisch neutral, d. h. es enthält nach der Ausdrucksweise der dualistischen Theorie gleiche Quanta positiver und negativer Elektricität. Entweder also ist jedes Atom elektrisch neutral, oder je ein Atom, welches positiv beladen bleibt, verbindet sich mit je einem Atom, welches seine positive Ladung mit einer negativen ausgetauscht hat."

Ohne Kenntniss der Helmholtz'schen Faraday-Rede hat auch Herr E. Budde aus den Gesetzen der Elektrolyse die Folgerung gezogen, dass es ein Minimalquantum der Elektricität geben müsse und auch bereits den annähernden Werth desselben berechnet.[1]) Diese Arbeit ist mir erst nach Publication meiner vorläufigen Mittheilungen bekannt geworden und hat daher leider in diesen noch keine Erwähnung gefunden.

Das Resultat, die elektrische Beladung der Valenzstellen betreffend, gilt zunächst nur für die freien Valenzen der Jonen in Elektrolyten. Aber es sind viele Thatsachen bekannt, welche dafür sprechen, dass die elektrolytische Leitung eine weit mehr verbreitete Eigenschaft ist, als man früher glaubte, dass dieselbe keineswegs ausschliesslich den Säuren und Salzen zukommt. Auch ist dieselbe, wie wir mit Sicherheit wissen, durchaus nicht auf den flüssigen Aggregatzustand beschränkt. Ferner können wir in zahlreichen Fällen aus secundären Prozessen bei der Elektrolyse auf die elektrische Ladung von Valenzen schliessen, welche nicht nothwendig die freien Valenzen eines Jon sind. Aus stark verdünnter Chlorwasserstoffsäure wird an der Anode neben Chlor auch

---

1) E. Budde, Wied. Ann. 25, p. 562; 1885.

Sauerstoff entwickelt. Entweder ist nun in diesem Falle der Sauerstoff selbst Anion, oder derselbe entsteht secundär durch Einwirkung des Chlors auf das Lösungswasser. In letzterem Falle würden die Chloratome, indem sie mit dem Wasserstoff des Wassers neue Chlorwasserstoffsäure bilden, ihre ursprüngliche negative Ladung behalten, so dass also der neutral entweichende Sauerstoff die entsprechenden Aequivalente negativer Ladung an die Anode abgeben müsste. Auf jeden Fall können wir schliessen, dass auch in den Wassermolekeln, welche bei der Elektrolyse, wenigstens der concentrirten Chlorwasserstoffsäure, gewiss nicht betheiligt sind, der Sauerstoff negative Ladung besitzt. In derselben Weise kommt man für viele andere Fälle zu der sicheren Folgerung, dass auch andere Valenzen die elektrische Ladung besitzen als die freien Jonenvalenzen. Jedes Atom oder jede Atomgruppe, welche bei einem secundären Process an die Stelle eines Jon treten kann, muss für jede Valenz mit einem elektrischen Elementarquantum beladen sein.

Es bleibt zunächst eine offene Frage, ob bei der elektrolytischen Ausscheidung freier neutraler Molekeln die Neutralisation so zu denken ist, dass jedes einzelne Atom des Jon neutralisirt wird; oder ob dieselbe in der Weise geschieht, dass beispielsweise beim Wasserstoff ein Atom sein positives Elementarquantum an die Kathode abgibt, dafür ein negatives empfängt, und sich mit einem anderen Atom, welches seine positive Ladung behalten hat, zu einer als Ganzes neutralen Molekel vereinigt. Herr von Helmholtz spricht sich für die letztere Alternative aus, welche zugleich mit der aus Avogadros Gesetz gezogenen Folgerung übereinstimmt, dass die Molekeln des freien Wasserstoffs aus je zwei Atomen zusammengesetzt sind.

Dass Atome derselben Art, wie nach dieser Ansicht bei den Gasen die beiden Atome einer Molekel, Ladungen entgegengesetzter Art besitzen können, folgt in anderen Fällen

mit Sicherheit aus elektrolytischen Processen. So ist der Schwefel in den Schwefelmetallen Anion, also negativ geladen; in Schwefelsäure muss er aber positiv geladen sein, da er bei der Elektrolyse concentrirter Schwefelsäure an der Kathode abgeschieden wird — ob dies durch einen primären oder einen secundären Process geschieht, kommt, wie oben auseinandergesetzt, dabei nicht in Betracht. Analog können wir auch für den Stickstoff schliessen; man muss annehmen, dass in der Stickstoffwasserstoffsäure $N_3 H$ die freie Valenz der Gruppe N_3 als diejenige eines Anion negativ geladen sei; dagegen bei der Elektrolyse von Amoniaksalzen und salpetersauren Salzen wird unter Umständen freier Stickstoff an der Kathode abgeschieden; also ist in diesen Verbindungen wenigstens ein Theil seiner Valenzwerthe positiv geladen.

Zu der Anschauung, dass von den beiden Atomen, welche die Molekel eines Gases bilden, das eine positiv, das andere negativ elektrisch sei, ist auf ganz anderem Wege auch Herr W. Giese,[1]) sowie später auch Herr A. Schuster[2]) gelangt, welche annehmen, dass unter dem Einflusse elektrischer Kräfte die beiden entgegengesetzt geladenen Atome getrennt werden und als Jonen die Leitung der Elektricität in Gasen ermöglichen. Diese Annahme hat durch die Versuche der beiden genannten und anderer Physiker[3]) einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit erlangt.

Aus den oben angeführten Betrachtungen gelangt Herr von Helmholtz zu dem Schlusse, dass nicht nur bei den

---

1) W. Giese, Wied. Ann. 17, p. 538, 1882; 38, p. 403, 1889.

2) A. Schuster, Proc. Roy Soc. London 37, p. 317, 1884; 1887 Nr. 256; 1890 Nr. 291 p. 526.

3) J. J. Thomson, Phil. Mag. 15, p. 432, 1883; 29, p. 358, 441, 1890; 36, p. 313, 1893. Rob. v. Helmholtz, Wied. Ann. 32, p. 1, 1887. Rob. v. Helmholtz und F. Richarz, Wied. Ann. 40, p. 161, 1890. E. Wiedemann und H. Ebert, Wied. Ann. 35, p. 209, 1888. J. Elster und H. Geitel, Wied. Ann. 37, p. 325 ff., 1889; 39, p. 330, 331, 1890. C. Ludeking, Phil. Mag. 33, p. 521, 1892.

Jonen, sondern ganz allgemein jeder Valenzwerth eines Atoms mit je einem Elementarquantum entweder positiver oder negativer Elektricität beladen sei.

Weiterhin schliesst Herr von Helmholtz aus Betrachtung der Arbeitsleistungen bei der Elektrolyse, dass die Elementarquanta der beiden Elektricitäten $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$, mit verschiedener Kraft von verschiedenen Atomen (vielleicht auch von den verschiedenen Verbindungsstellen eines einzelnen multivalenten Atoms) angezogen werden. Wasserstoff und die Metalle müssen stärkere Anziehung für $+\varepsilon$, schwächere für $-\varepsilon$ haben; umgekehrt Sauerstoff und die Halogene.

Eine solche, für verschiedene Substanzen und für die beiden Elektricitäten verschiedene Anziehung zwischen ponderabler Materie und Elektricität ist keine ad hoc gemachte Hypothese, sondern muss auch angenommen werden zur Erklärung von Volta's Fundamentalversuch über die Scheidung der Elektricitäten beim Contact heterogener Körper. Aus der Verschiedenheit der Anziehungen für die beiden Elektricitäten ergibt sich, dass unter Leistung positiver Arbeit, welche als abgegebene Wärmemenge erscheinen kann, eine positiv beladene Sauerstoffvalenz ihre Ladung gegen eine negative auszutauschen vermag. Hieraus hat Herr von Helmholtz[1]) das Zustandekommen der Convectionsströme in sauerstoffhaltigen verdünnten Säuren erklärt; weiterhin habe ich gezeigt,[2]) wie jener Umstand ebenfalls eine vollständige Aufklärung darbietet für das verschiedene Verhalten der beiden Gruppen von Superoxyden, welche Schönbein unter den Namen „Ozonide“ und „Antozonide“ unterschied.

Die von Berzelius behauptete und auch von Faraday angenommene Identität der chemischen Verwandtschaft und

---

1) H. von Helmholtz, Ber. d. Berl. Akad. 1873, p. 587; 1880, p. 285; 1883, p. 662; Pogg. Ann. 150, p. 483, 1873; Wied. Ann. 11, p. 737, 1880. Wissenschaftliche Abhandl. 1, p. 830, 917.

2) F. Richarz, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 21, p. 1675, 1888.

der Elektricität spricht Herr von Helmholtz auf Grund der entwickelten Schlussfolgerungen dahin aus, dass wenigstens die „bei weitem mächtigsten unter den chemischen Kräften elektrischen Ursprungs sind. Die Atome haften an ihren elektrischen Ladungen und die einander entgegengesetzten Ladungen wieder aneinander". Wenn jede Valenz mit einem Elementarquantum entweder von $+E$ oder von $-E$ beladen ist, so können elektrisch neutrale Verbindungen nur hergestellt werden, wenn jede positiv beladene Valenzstelle sich mit je einer negativ beladenen verbindet. „Daraus folgt dann unmittelbar, dass jede Verwandtschaftseinheit eines Atoms nothwendig mit einer und nur mit einer solchen Einheit eines anderen Atoms verknüpft sein muss. Dies ist in der That die wesentliche Behauptung der Valenztheorie der modernen Chemie."

So würde sich in einfachster Weise Kekulés Verkettung der Atome durch die Verbindung ihrer Valenzwerthe ergeben, wie sie in den typischen Verbindungen gefunden wird. Elektrolyte aber gehören stets zu den typischen Verbindungen. Anders würde es sich verhalten mit den losen molecularen Aggregaten, welche nicht mit Valenzwerthen an einander geknüpft sind, z. B. der Bindung von Krystallwasser; ihre Bestandtheile können nicht durch elektrische Kräfte von einander getrennt werden; dieselben werden also auch nicht durch elektrische Kräfte verbunden, sondern anders geartete Molecularkräfte müssen zwischen ihnen wirksam sein.

Herr von Helmholtz hat sich bei seinen Folgerungen und Anschauungen der Sprache der alten dualistischen Theorie bedient; gerade in ihr lassen sich die quantitativen Beziehungen bei der Elektrolyse am leichtesten und bestimmtesten ausdrücken.

Sind die Schlüsse in der Sprache der einen Theorie consequent durchgeführt, so ist der Ausdruck derselben Schlussreihe in der Sprache einer anderen Theorie wie eine Ueber-

setzung: der wesentliche Inhalt bleibt davon unberührt. Insbesondere ist hervorzuheben, dass alle auf Grund feststehender Thatsachen angestellten Berechnungen mechanischer Grössen, wie der Anziehung zwischen Elektricitätsmengen, der Arbeit bei ihrer Trennung u. s. w. von der Sprache der Theorie unberührt bleiben, in welcher der Zusammenhang der Thatsachen bildlich ausgedrückt wird.

II. Aus der kinetischen Gastheorie entnommene Voraussetzungen.

In die Berechnung des elektrischen Elementarquantums geht aus der kinetischen Gastheorie die Zahl der Molekeln in 1 ccm Gas ein. Man muss sich darüber klar sein, mit wie geringer Sicherheit diese Zahl bekannt ist. Ihre Berechnung ist bekanntlich zuerst aufgeführt von Herrn Van der Waals.[1]) Die zu Grunde liegenden Gleichungen sind nach der „kinetischen Theorie der Gase" von Herrn O. E. Meyer, pag. 228—230, folgende:

Es sei L die mittlere molekulare Weglänge, λ die Kante des einer Molekel zukommenden Elementarwürfels, ϱ der von Clausius eingeführte „Radius der Wirkungssphäre". Dann ist in erster Annäherung

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2}$$

Eine zweite Beziehung geht aus von dem wahren Volumen b der Molekeln in der Zustandsgleichung von Herrn Van der Waals. Der Werth von b gilt, wie diese Zustandsgleichung, für die Masseneinheit des betrachteten Gases. O. E. Meyer findet dann aus der Verkleinerung, welche an

1) J. D. van der Waals, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, deutsch von Roth, Leipzig 1881, Beibl. z. Wied. Ann. 1, p. 10, 1877. Rühlmann, Mechan. Wärmeth. II, p. 244.

dem Werthe von L bei einer zweiten Annäherung anzubringen ist:

$$b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \mathfrak{N} \pi \varrho^3$$

wo $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekeln in der Masseneinheit ist. Multiplicire die beiden Gleichungen mit einander und beachte, dass $\mathfrak{N} \lambda^3 = v$, dem scheinbaren Volumen, welches die Masseneinheit des Gases als Ganzes einnimmt, ist, so ergibt sich

$$\varrho = \frac{3b}{2v} L$$

Es soll bei Anwendung dieser Gleichung stets eine Atmosphäre als Druckeinheit, und das Volumen v der Masseneinheit beim Druck 1 und der Temperatur 0^0 als Volumeneinheit gewählt werden. Die von Van der Waals angegebenen Zahlenwerthe für b gelten meist für diese Einheiten. Einige seiner b sind aber für 1 m Quecksilber als Druckeinheit angegeben; die zugehörige Ausnahmsvolumeneinheit ist also das 0,76 fache unserer gewöhnlichen; und da b ein seinem Wesen nach constantes Volumen bedeutet, betragen die Ausnahms-Zahlenwerthe von b das 1/0,76 fache derjenigen für die gewöhnliche Einheit; zur Reduction auf unsere obigen, gewöhnlichen Einheiten sind jene Ausnahms-Zahlenwerthe von b daher mit 0,76 zu multipliciren.[1])

Wird nach dieser Reduction die Formel für ϱ bei einem Gase angewandt, und wird $p = 1$ Atmosphäre, die Temperatur $= 0^0$ genommen, so wird $v = 1$, und für L ist der Werth L_0 bei 0^0 zu nehmen; also

---

1) Die obigen Betrachtungen führen mit Uebergehung der letzten Gleichungen auf Seite 229 bei O. E. Meyer für ϱ unmittelbar zu obiger Schlussformel, welche im Wesentlichen mit den ersten Gleichungen auf Seite 230 ebenda übereinstimmt, in der Form aber, insbesondere bezüglich der Dimensionen vielleicht übersichtlicher ist.

$$\varrho = \frac{3}{2} b L_0$$

Für L_0 sind die Werthe genommen, welche aus den für 0° geltenden Reibungscoefficienten η_0 nach den Beobachtungen von Herrn von Obermayer[1]) folgen. Dieselben sind in der unten stehenden Tabelle angegeben; aus η_0 ist die Weglänge nach der Formel

$$L_0 = \frac{\eta_0}{0{,}318 \cdot \mu \cdot \Omega}$$

berechnet,[2]) wo μ die Dichtigkeit, Ω der Maxwell'sche Mittelwerth der Molekulargeschwindigkeit ist. Die bei Wasserdampf unten angegebene Zahl für η_0 ist den Beobachtungen der Herren Kundt und Warburg[3]) entnommen.

Die Herkunft der Werthe von b ist in der unten angegebenen Tabelle jedesmal einzeln aufgeführt; wenn verschiedene Beobachtungen bezw. Berechnungen für ein und dasselbe Gas erheblich verschiedene Werthe ergeben haben, sind die Extreme, sonst das Mittel angegeben.

ϱ, der „Radius der Wirkungssphäre", wird gleich dem Durchmesser der als starre Kugel gedachten Molekel angenommen, also deren Querschnitt $q = \frac{\varrho^2 \pi}{4}$. Die Summe Q_0 aller Molekularquerschnitte in 1 ccm bei 0° und Atmosphärendruck ergibt sich aus der Weglänge L_0 nach der Formel[4]): $Q_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}\, L_0}$. Endlich wird dann $\frac{Q_0}{q}$ die Zahl

1) v. Obermayer, Carls Rep. 13, p. 156, 1877.

2) O. E. Meyer, l. c., pag. 323.

3) Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. 155, p. 540, 1876; O. E. Meyer, l. c., p. 141, 142. Der Werth η ist auf 0° reducirt unter der Annahme, dass der Reibungscoefficient für Wasserdampf wie für andere der Condensation nahe Gase der absoluten Temperatur proportional sei. (O. E. Meyer, p. 159.)

4) O. E. Meyer, l. c., p. 206.

der Molekeln in 1 ccm Gas bei 0° und Atmosphärendruck. Die Resultate, stets in C. G. S.-Einheiten angegeben, sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	η_0	L_0	Q_0	b	ϱ	$N = \frac{Q_0}{q}$
Luft	1677	912	19400	0,0025 [1])	3,42	21
Stickstoff . . .	1659	918	19200	0,00176 [2])	2,42	42
Wasserstoff . .	861	1783	9900	0,0024 [2])	6,42	3*
				0,00049 [3])	1,31	73
Kohlensäure . .	1383	613	28800	0,0028 [4])	2,58	55
				0,00059 [2])	0,54	1252*
Stickoxydul . .	1353	598	29500	0,00191 [5])	1,71	128
Aethylen . . .	922	508	34800	0,0025 [6])	1,91	121
Wasserdampf . .	909	628	28100	0,00105 [7])	0,99	365
Schweflige Säure	1225	444	39800	0,00249 [8])	1,66	184
Chloräthyl . . .	869	325	54400	0,00397 [8])	1,94	184
Chlorwasserstoff .	1379	672	26300	0,00173 [8])	1,74	110
	10^{-7}	10^{-8} cm	cm²		10^{-8} cm	10^{18}

Die Werthe von ϱ sind nicht sehr voneinander verschieden, obwohl die Zahl der Atome in einer Molekel zwischen 2 und 8 (bei $C_2 H_5 Cl$) beträgt; auch sind die Werthe von ϱ ganz ähnlich den aus anderen Ueberlegungen erschlossenen. (Vgl. O. E. Meyer § 102, § 107.) Allgemein kann der Durchmesser eines Moleküls etwa von der Grössenordnung 10^{-8} cm angesehen werden; die obigen Zahlen liegen zwischen dem 6fachen und der Hälfte dieses Werthes.

Die Zahlen für N gruppiren sich zwar ersichtlich um ein Mittel, welches etwa 10^{20} beträgt; sie liegen aber bis zum 12fachen und $^1/_{30}$ dieses Werthes, entsprechen also sehr

1) Van der Waals-Roth, l. c., p. 72; und Berechnung von O. E. Meyer, l. c., p. 74. — 2) O. E. Meyer, l. c., p. 74. — 3) Van der Waals-Roth, l. c., p. 99. — 4) Ebd. p. 74, 81, 85, 94, 136. — 5) Ebd. p. 84, 136. — 6) Ebd. p. 86, 101, 136. — 7) Ebd. p. 135. — 8) Ebd. p. 136.

wenig Avogadros Regel.[1]) Das liegt gewiss nicht lediglich an der Unsicherheit der in die Rechnung eingehenden Beobachtungen, sondern an den Prinzipien der ganzen Ueberlegungen über den „Radius der Wirkungssphäre", über die Art wie die räumliche Ausdehnung der Molekeln in die Weglänge und in die Zustandsgleichung eingeht u. s. w., Ueberlegungen, die man aber vorläufig mit der ihnen anhaftenden Unsicherheit hinnehmen muss, will man nicht überhaupt das intellectuelle Opfer eines Verzichtes auf derartige Speculationen bringen; wenn man nur jederzeit ihrer grossen Unsicherheit eingedenk bleibt.

III. Berechnung des elektrischen Elementarquantums.

Die folgende Rechnung knüpft an die „Berechnung der elektrostatischen Wirkung der elektrolytischen Ladungen von 1 Milligramm Wasser" an, welche Herr von Helmholtz im Anhang I zur Faraday-Rede gegeben hat.

Nach den neuesten Bestimmungen von F. und W. Kohlrausch[2]) scheidet 1 Ampère in 1 sec 0,1740 ccm Knallgas, also 0,1160 ccm Wasserstoff von 0^0 und Atmosphärendruck aus. Die in 1 sec von der Intensität 1 Ampère durch einen Querschnitt des Stromes transportirte Elektricitätsmenge ist gleich 10^{-1} elektromagnetischen, oder gleich $3 \cdot 10^9$ elektrostatischen C.G.S.-Einheiten. Davon fliesst die Hälfte als positive Elektricität in der einen, die Hälfte als negative in der anderen Richtung. Als den betrachteten Querschnitt

---

1) Die extremen Werthe für N, welche in der Tabelle mit * bezeichnet sind, gehen übrigens aus einer Berechnungsweise hervor, bei welcher nur die Abweichung für Wasserstoff und Kohlensäure vom Boyle-Mariotte'schen Gesetz berücksichtigt, während die anderen, dem Mittel näheren Werthe für dieselben Gase aus den Abweichungen auch vom Gay-Lussac'schen Gesetze abgeleitet sind. Vgl. O. E. Meyer, l. c., pag. 74, 230.

2) F. und W. Kohlrausch, Wiedem. Ann. XXVII, p. 59, 1886.

nehmen wir die Kathode. Die sämmtlichen als Kation vorhandenen H-Atome sind ursprünglich positiv beladen. Von denjenigen, welche als neutrales Gas entweichen, gibt die Hälfte bei der Elektrolyse die positive Ladung an die Kathode ab, erhält dafür negative Ladung und vereinigt sich mit der anderen Hälfte, welche ihre positive Ladung behalten hat, zu Molekeln, welche je ein positives und je ein negatives Atom enthalten. Hieraus und aus den obigen Zahlenangaben folgt, dass in 0,1160 ccm Wasserstoffgas die gesammte Ladung der positiven beziehungsweise der negativen Atome $15 \cdot 10^8$ positive beziehungsweise negative elektrostatische C. G. S.-Einheiten beträgt. Nennen wir E den absoluten Werth der Ladung einer Art, welche in 1 ccm Wasserstoff bei 0° und Atmosphärendruck vorhanden ist, so folgt

$$E = 129 \cdot 10^8 \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1} \text{ pro ccm.}$$

Für ein Gas, dessen Molekeln aus 2 zweiwerthigen oder dreiwerthigen Atomen bestehen, z. B. für Sauerstoff und Stickstoff, hat E den zweifachen und dreifachen Werth.

An die erste Ausführung dieser Rechnung hatte ich die Beantwortung der Frage angeknüpft, ob die elektrolytische Leitung in einem Gase durch die Jonenladungen auch bei den stärksten Verdünnungsgraden noch leicht vorstellbar erscheine.[1]) Die stärkste Verdünnung, welche mit Toepler-Hagen'schen Quecksilberluftpumpen erreicht wird, beträgt etwa ein Hundert Milliontel Atmosphäre.[2]) Dabei kommen also auf 1 ccm Wasserstoff noch 129 elektrostatische Einheiten positiver und negativer Elektricität und entsprechend das Doppelte bezw. Dreifache für Sauerstoff resp. Stickstoff.

1) F. Richarz, Sitzber. Niederrh. Ges. Bonn. 47, p. 114, 1. December 1890. Vergl. H. Ebert und E. Wiedemann, Wied. Ann. 50, p. 28/30, 1893.

2) E. B. Hagen, Wied. Ann. 12, p. 438, 1881. A. Raps, Wied. Ann. 48, p. 379, 1893.

Eine Kugel von 1 cm Halbmesser auf ein Potential von 300 Volt geladen, enthält eine elektrostatische Mengeneinheit. Ein schneller Uebergang einer solchen Ladung von der Kugel in das Gas würde also auch bei den grössten herstellbaren Verdünnungen für die Vorstellung keine Schwierigkeit machen.

Aus der oben berechneten elektrischen Gesammtladung einer Art E, welche in 1 ccm Wasserstoffgas vorhanden ist, und aus der Zahl N der Molekeln ergibt sich eine angenäherte Berechnung der Ladung einer Valenzstelle. Die Unsicherheit dieser und aller analogen Berechnungen soll nach dem Vorgange von Herrn A. P. Chattock (siehe Citat pag. 38) durch das Zeichen $\approx$ statt des Gleichheitszeichens angedeutet werden. Für $N \approx 10^{20}$ wird das Helmholtz'sche Elementarquantum

$$\varepsilon = \frac{E}{N} \approx 129 \cdot 10^{-12} \, \mathrm{cm}^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{g}^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{sec}^{-1}$$

Herr E. Budde findet $510 \cdot 10^{-12}$ C.G.S.; G. J. Stoney[1]) $30 \cdot 10^{-12}$ C.G.S. Nach den früheren Ausführungen würden die extremsten der in der Tabelle auf Seite 14 vorkommenden Werthe von N für das Elementarquantum Abweichungen bis zum 30 fachen und bis zu einem Zwölftel von dem oben angegebenen mittleren Werthe ergeben.

IV. Grössenverhältniss von Gravitation, elektrostatischen und elektrodynamischen Kräften zwischen den Atomen einer Molekel.

Herr von Helmholtz hat in der Faraday-Rede bereits gezeigt, dass die elektrolytischen Ladungen von Wasserstoff und Sauerstoff im Wasser, wenn seine beiden chemischen Bestandtheile ohne ihre Ladungen zu verlieren von einander getrennt werden könnten, eine Anziehung auf einander aus-

1) G. J. Stoney, Trans. Royal Dublin Soc., (2), 4, p. 563—608, 1891.

üben würden, welche der gegenseitigen Gravitation ihrer ponderablen Träger um das 400,000 Billionenfache überlegen wäre.[1]) Da beide Arten von Kräften dem Newton'schen Gesetze gehorchen, kann man die Vergleichung beider Kräfte unabhängig von der Entfernung und Masse machen. Diesen Schluss können wir also auch unmittelbar übertragen auf die beiden Atome einer Molekel. Wenn nun auch dabei die Voraussetzung nicht erfüllt ist, dass die beiden Atome gegenüber ihrer Entfernung als Punkte zu betrachten sind, so werden doch die elektrischen Ladungen ihren Sitz an den einander zugekehrten Seiten der Atome haben und also a fortiori die Anziehung der elektrischen Ladungen sehr viel grösser sein, als die Gravitation der beiden Atome auf einander.

In Folge der Wärmebewegung werden aber die Valenzladungen der beiden Atome einer Molekel auch elektrodynamische Kräfte auf einander ausüben können. Im gasförmigen Zustande wird die Molekel als Ganzes eine fortschreitende Bewegung haben, deren Geschwindigkeit mit u bezeichnet werde; ausserdem wird die Molekel Drehung um den Schwerpunkt ausführen, wobei noch der Abstand der beiden Atome veränderlich sein kann. Unter vereinfachenden Annahmen ist leicht zu zeigen, dass die elektrodynamische Kraft der sich bewegenden Valenzladungen gegen die elektrostatischen ausserordentlich klein ist.

Die beiden Atome sollen gleiche Masse haben; sie sollen mit ihren Ladungen ε als punktförmig angenommen werden; die innere Molekularbewegung soll in einer Umkreisung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes mit constanter Geschwindigkeit c bestehen. Die elektrodynamische Wirkung, die theils von der fortschreitenden Bewegung, theils von der inneren Kreisbewegung herrührt, ist nach einem der elektrodynamischen Grundgesetze zu berechnen. Weber's Gesetz gibt

---

1) H. von Helmholtz, Vorträge und Reden II, p. 317.

keine Wirkung. Die Grundgesetze von Riemann und Clausius ergeben eine solche in Richtung der Verbindungslinie; bezeichnen wir mit r den Abstand der beiden Atome, mit v die Lichtgeschwindigkeit, so ergibt sich für die elektrische Gesammtkraft stets ein Ausdruck von der Form

$$\frac{\varepsilon^2}{r^2}\left(1 + n\frac{u^2}{v^2}\right)$$

Für die innere Kreisbewegung ist c statt u zu setzen; n ist ein Zahlenfactor, der für die beiden Grundgesetze resp. für die beiden Bewegungsarten verschiedene, zwischen -4 und $+4$ liegende Werthe hat; die elektrodynamische Wirkung wird zu vernachlässigen sein, wenn u und c klein sind gegen $v = 3 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1}.

Was zunächst u betrifft, so ist sein Mittelwerth aus der kinetischen Gastheorie bekannt; [1]) derselbe ist am grössten für Wasserstoff $= 1{,}7 \cdot 10^5$ cm sec^{-1}, also in der That klein gegen v. Für c erhalten wir einen Anhalt aus der Theorie des Wärmegleichgewichts zwischen mehratomigen Gasmolekeln von Herrn Boltzmann.[2]) Nach derselben ist die mittlere lebendige Kraft L_a der fortschreitenden Bewegung einer Molekel gleich der gesammten mittleren lebendigen Kraft l eines Atoms. Nenne ich noch die mittlere lebendige Kraft der inneren Bewegung in der Molekel L_i, so ist die gesammte lebendige Kraft einer Molekel $= L_a + L_i$, und bei einer zweiatomigen Molekel der auf ein Atom entfallende Antheil

$$l = \frac{(L_a + L_i)}{2}$$

Aus Boltzmann's Resultat $l = L_a$ folgt daher

$$L_i = L_a$$

1) O. E. Meyer, kinet. Gastheorie, p. 45.

2) L. Boltzmann, Sitzber. der Wiener Akad. mathem. Cl. 63, p. 417, 1871.

Geschieht, wie zur Vereinfachung angenommen werden musste, die fortschreitende Bewegung mit der constanten Geschwindigkeit u, die innere Kreisbewegung mit der constanten linearen Geschwindigkeit c, so ist also $c = u$. Auch c ist mithin klein gegen die Lichtgeschwindigkeit v, und unter den vereinfachenden Annahmen jede elektrodynamische Wirkung der bewegten Valenzladungen aufeinander zu vernachlässigen. Wenn nun auch die Voraussetzungen nicht erfüllt sind, dass erstens die Atome und ihre Ladungen als punktförmig anzusehen sind, zweitens dass die intramolekulare Bewegung der Atome in Umkreisung des Schwerpunktes besteht, so wird dadurch doch nicht die Grössenordnung im Verhältnisse von elektrostatischer und elektrodynamischer Kraft geändert werden. Wir werden also letztere ebenso wie die Gravitation gegenüber der ersteren Kraft vernachlässigen können.

Ueber andere Kräfte ausser den elektrischen und der Gravitation, welche zwischen den Atomen einer Molekel thätig sein könnten, wissen wir nichts Sicheres. Wir wollen daher im Folgenden für einige Fälle, in welchen ein Vergleich mit anderen experimentellen Daten zu Gebote steht, zusehen, zu welchen Folgerungen die Annahme führt, dass die elektrostatischen Kräfte der Ladungen der Valenzstellen die einzigen zwischen 2 Atomen einer Molekel wirksamen Kräfte seien.

V. Die Dissociationswärme einer aus 2 Atomen bestehenden Molekel.

Die Wärmeentwicklung bei chemischen Prozessen wird im Sinne der Helmholtz'schen elektrochemischen Theorie vornehmlich durch die Verschiedenheit der Anziehung der Valenzstellen für die beiden Arten der Elektricität bedingt sein. Betrachten wir z. B. die Bildung von Chlorwasserstoff aus Chlorknallgas. Aus den neutralen Molekeln $(H+)$ $(-H)$

und (Cl +) (— Cl) gehen schliesslich die Molekeln (H +) (— Cl) hervor. Die erste Phase des Prozesses ist die Trennung der zu je zweien verbundenen Wasserstoff- und Chloratome. Dabei leistet die Anziehung der beiden entgegengesetzten Ladungen negative Arbeit. Die zweite Phase besteht darin, dass die negative Hälfte der H-Atome ihre schwach festgehaltene negative Ladung an Cl-Atome abgeben und dafür die stärker angezogene positive Ladung erhalten, während die Hälfte der Cl-Atome ihre schwach festgehaltene $+ \varepsilon$ abgeben und dafür die stärker angezogene $- \varepsilon$ erhalten. Das Resultat dieses Austausches ist also, dass alle H-Atome positiv und alle Cl-Atome negativ beladen sind und offenbar leisten bei diesem Austausch die Anziehungskräfte zwischen den ponderablen Atomen und den Elektricitäten positive Arbeit. Die dritte Phase des Processes ist die Vereinigung je eines (H +) mit einem (— Cl) Atom zu neutralen Salzsäure-Molekeln. Hierbei leistet die Anziehung der beiden Ladungen positive Arbeit. Die Arbeitsleistungen während der ersten und dritten Phase werden annähernd gleich und entgegengesetzt sein, so dass die chemische Wärmeentwickelung hauptsächlich durch die zweite Phase, also durch die Verschiedenheit der Anziehungskraft ein und derselben Valenzstelle für die beiden Arten der Elektricität gegeben ist.

Ganz anders verhält es sich bei der Dissociation eines Gases. Die neutralen Molekeln (X +) (— X), welche durch e i n e Bindung zusammenhaften, sollen bei höherer Temperatur in die beiden isolirten Atome zerfallen. Wenn die Anziehung der beiden Ladungen die einzige zwischen den Atomen wirksame Kraft ist, würde die negative Arbeit derselben wesentlich die Wärmeabsorption bei der Dissociation bedingen. In Bezug auf die zuzuführende Energie ist ausser der von den Kräften geleisteten Arbeit noch zu berücksichtigen, welchen Inhalt an lebendiger Kraft das dissociirte Gas einerseits und

das nicht dissociirte Gas andererseits besitzen. Wir gehen aus von dem dissociirten Gase. Das Volumen soll constant sein, so dass äussere Arbeit nicht geleistet wird. Wir denken uns das dissociirte Gas abgekühlt bis auf eine Temperatur, bei welcher die Vereinigung aller Atome zu zweien eintreten kann, denken uns aber zunächst das Gas bei dieser Temperatur noch dissociirt. Dann soll die Association eintreten und nach derselben das Gas wieder auf die vorherige Temperatur gebracht werden. Die hierbei zu entziehende Wärmemenge ist die „Dissociationswärme". Der Gesammtinhalt an lebendiger Kraft ist vor und nach der Association derselbe; dies folgt unmittelbar daraus, dass bei derselben Temperatur der Mittelwerth der gesammten lebendigen Kraft je eines Atoms, auch bei verschiedenen Gasen, stets denselben Werth hat, einerlei ob die Atome isolirt oder zu Molekeln verbunden sind. Da also der Inhalt an lebendiger Kraft ungeändert bleibt, ist die Dissociationswärme gleich der Veränderung der potentiellen Energie, oder gleich der Arbeit der Kräfte, welche die beiden Atome einer Molekel auf einander ausüben.

Diese Anziehung soll nun nach unserer Annahme durch die elektrostatische Kraft der Valenzladungen gegeben sein. Wenn diese wieder als punktförmig angenommen werden und im Zustande der Association sich im Abstande r von einander befinden, so ist die Arbeit bei der Annäherung aus unendlicher Entfernung nach der Bezeichnung unserer früheren Gleichungen für eine Molekel

$$\text{gleich } \frac{\varepsilon^2}{r}$$

Bezeichnen wir den Mittelwerth einer Grösse x wie üblich durch $\bar{x}$, so wird dieselbe Arbeit für alle N-Molekeln in einem Cubikcentimeter

$$W = N\varepsilon^2 \, \overline{\frac{1}{r}}$$

Das einem Doppelstern vergleichbare System der sich

um einander bewegenden beiden Atome wird in Bezug auf die Raumerfüllung bei den Zusammenstössen der Molekel sich ähnlich verhalten wie eine Kugel, deren Durchmesser gleich ist dem mittleren Abstande der beiden Atome;[1] $\bar{r}$ kann gleich dem Molekulardurchmesser ϱ von Seite 14 genommen werden. Wenn ferner grosse Abweichungen des Momentanwerthes r vom Mittelwerthe $\bar{r}$ nur sehr selten vorkommen, so kann auch ohne Fehler der Grössenordnung $\overline{\frac{1}{r}} \approx \frac{1}{\bar{r}} \approx \frac{1}{\varrho}$ gesetzt werden. Dass diese Voraussetzung erfüllt ist, ist schon von vornherein plausibel; es folgt aber auch aus Herrn Boltzmann's kinetischer Theorie mehratomiger Gase. Nach derselben ist für ein Atom bei gegebener Lage und gegebener lebendiger Kraft jede Richtung gleich wahrscheinlich.[2] Daraus folgt für eine aus 2 Atomen bestehende Molekel, dass eine Bewegungsrichtung, welche zu der Verbindungslinie der beiden Atome nahe senkrecht ist, sehr viel häufiger vorkommt als jede andere und dass die Häufigkeit abnimmt bis zur Bewegungsrichtung in der Verbindungslinie selbst. Z. B. verhält sich die Wahrscheinlichkeit einer Bewegungsrichtung, welche mit der Verbindungslinie der beiden Atome einen Winkel von 89° bis 90° einschliesst, zu der Wahrscheinlichkeit einer solchen in einem Winkel von 0° bis 1° ebenso wie auf der Erdkugel der Flächeninhalt der äquatorialen Zone von 0° bis 1° geogr. Breite zu der Polarkappe von 89° bis 90° Breite. Wenn nun die der tangentialen nahe Bewegungsrichtung an Häufigkeit so sehr überwiegt, so muss die Bahn der nach unserer Annahme unter dem Einflusse einer Newton'schen Kraft sich in einander bewegenden Atome sehr viel häufiger eine nahezu kreisförmige, d. h. elliptische mit geringer Excentri-

1) Vergl. O. E. Meyer, kinet. Gastheorie, pag. 213.

2) L. Boltzmann, l. c., p. 416.

cität, als eine gestreckte von grosser Excentricität sein.[1]) Dann ist auch die Voraussetzung erfüllt, dass die Momentanwerthe von r sehr selten weit vom Mittelwerth $\bar{r}$ abweichen, und es kann also $\overline{\frac{1}{r}} \approx \frac{1}{\varrho}$ gesetzt werden.

Dies eingesetzt wird die Gleichung für die Dissociationswärme

$$W\varrho \approx N\varepsilon^2$$

Die Dissociationswärme W ist für einige dem theoretisch betrachteten Falle entsprechende Gase bekannt; werden für ϱ, N, ε ferner ihre im Früheren angenommenen Werthe gesetzt, so lässt sich unsere Gleichung controliren; dass dieselbe für Untersalpetersäure und Joddampf der Grössenordnung nach erfüllt ist, habe ich bereits früher bestätigt.[2])

Der Vorgang der Dissociation von Untersalpetersäure N_2O_4 zu $2\,NO_2$ ist für uns vollkommen analog der Dissociation von 2 Atomen, die mit einer Bindung verknüpft sind; denn die einwerthige Gruppe $-\overset{\text{III}}{N}\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}O\\|\\O\end{smallmatrix}$ oder $-\overset{\text{V}}{N}\!\!\lll\!\!\begin{smallmatrix}O\\ \\O\end{smallmatrix}$ spielt bei derselben vollkommen die Rolle eines Atoms.

---

1) Vorstehende Ueberlegung lässt sich analytisch durchführen; vergl. Verhdlg. d. Phys. Ges. Berlin, 10, p. 76, 77; 26. Juni 1891. Es ergibt sich ein Resultat von der Form $\overline{\frac{1}{r}} = \frac{q}{\bar{r}}$. Der Faktor q, nahe $= 1$, kommt bei der Unsicherheit der anderen Ueberlegungen nicht in Betracht.

2) F. Richarz, Sitzber. d. Niederrh. Ges. 48, p. 25, 26; 12. Jan. 1891. Verhdlg. d. Phys. Ges. Berlin, 10, p. 73—79, 1891. Die Literatur über die Messungen der Dissociationswärme siehe daselbst, und Wied. Ann. 48, p. 491/492, 1893. — Welche von den 4 Grössen W, ϱ, N, ε man vermöge meiner obigen Gleichung aus den 3 übrigen berechnet, um den so berechneten Werth mit dem direct beobachteten zu vergleichen, ist selbstverständlich gleichgültig. In meiner ersten Publication hatte ich ϱ gewählt, in der zweitgenannten ε; Herr Ebert führt die Rechnung für W durch. (Wied. Ann. 50, p. 255—260, 1893.)

Aus den Versuchen von Berthelot und Ogier ergibt sich für Untersalpetersäure (bezogen auf die in 1 ccm bei 0^0 und Atmosphärendruck enthaltene Masse):

$$W = 25 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Für die Dissociation des Joddampfs hat Herr Boltzmann aus Versuchen von Fr. Meyer und J. M. Crafts für die im selben Volumen enthaltene Masse berechnet:

$$W = 54 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Endlich hat Herr E. Wiedemann aus Messungen der Wärmemenge, welche zur Ueberführung des Banden- in das Linienspectrum nöthig ist, gefunden, dass einem Gramm Wasserstoffgas von gewöhnlicher Temperatur zur Zerlegung in seine Atome etwa 128000 Gramm — Calorien zugeführt werden müssen.[1]) Daraus ergibt sich für die im ccm bei 0^0 und Atmosphärendruck enthaltene Masse:

$$W = 483 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Auch diesen Werth habe ich, wie die beiden anderen, schon bei der ausführlichen Zusammenstellung des lediglich kinetischen Theiles meiner Schlussfolgerungen mit in Betracht gezogen.[2])

Die abgeleitete Gleichung für die Dissociationswärme wollen wir so benutzen, dass wir aus W, ϱ und N den Werth von ε^2 berechnen, welcher Werth die Constante in der Newton'schen Kraft zwischen den Valenzladungen ist und in allen Consequenzen der Theorie auftreten muss und gegebenenfalls berechnet werden kann, so auch weiterhin im nächsten Abschnitt dieser Arbeit. Setzen wir $N \approx 10^{20}$, $\varrho \approx 10^{-8}$ cm, so erhalten wir aus den betr. Werthen der Dissociationswärme

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10, p. 253, 1880; 18, p. 509, 1883. Ostwald, Allgem. Chemie 2, p. 49.

2) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 492, 1893.

bei Untersalpetersäure: $\varepsilon \gtrsim 50 \cdot 10^{-12}\, cm^{\frac{3}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, sec^{-1}$
bei Joddampf: $\varepsilon \gtrsim 73 \cdot 10^{-12}$ „
bei Wasserstoff: $\varepsilon \gtrsim 220 \cdot 10^{-12}$ „

Dass diese Werthe mit dem aus der Elektrolyse folgenden $\varepsilon \gtrsim 129 \cdot 10^{-12}$ so nahe übereinstimmen, ist bei der grossen Unsicherheit der Berechnungen und der Willkür verschiedener Annahmen teilweise Zufall; man darf durchaus nicht sagen, dass durch diese Uebereinstimmung die elektrochemische Theorie bestätigt sei. Denn es könnten ausser den elektrostatischen Kräften der Valenzladungen noch andere Kräfte von doppelter, dreifacher oder ähnlicher Grösse vorhanden sein, ohne dass die gefundene Uebereinstimmung innerhalb der Grenzen ihrer Unsicherheit gestört würde. Das aber werden wir sagen dürfen, dass wir nicht in Widerspruch mit den experimentellen Daten für die Dissociationswärme treten, wenn wir mit Herrn v. Helmholtz annehmen, dass die chemischen Kräfte zwischen den Atomen mit den elektrostatischen zwischen den Valenzladungen identisch sind.

VI. Anwendung des Satzes vom Virial und der Boltzmann'schen Theorie mehratomiger Gase.

Die innere Bewegung der Atome in einer Molekel ist eine stabile; auf sie lässt sich daher der Virialsatz von Clausius anwenden.[1]) Da die Zahl der in Wechselwirkung begriffenen Molekeln sehr klein ist, gegen die Gesammtzahl, kann von den Kräften der Molekeln untereinander abgesehen werden. In einem gegebenen Augenblicke kommen alle möglichen Zustände der relativen Bewegung und Lage, welche die Atome e i n e r Molekel nach einander annehmen, gleichzeitig bei den verschiedenen Molekeln vor. Es werde mit

1) Clausius, Sitzber. der Niederrh. Ges. 27, p. 114, 1870. Pogg. Ann. 141, p. 125, 1870. Jubelbd. p. 411, 1874. Literatur siehe Wied. Ann. 48, p. 468, 1893.

$\mathcal{A}_i$ die gesammte lebendige Kraft der inneren Bewegung der Atome in der Volumeneinheit, also diejenige der Bewegung der Atome relativ zum Schwerpunkte der Molekel, welcher sie angehören, bezeichnet. $f(r)$ sei die gegenseitige Anziehung der Atome einer Molekel. Dann ergibt nach Obigem der Virialsatz:[1])

$$\mathcal{A}_i = \tfrac{1}{2} \Sigma r f(r)$$

Für die gesammte lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molekeln in der Volumeneinheit, $\mathcal{A}_a$, ergibt sich ebenfalls aus dem Virialsatz[1])

$$\mathcal{A}_a = \tfrac{3}{2} p$$

wo p der Druck ist.

Die bereits mehrfach erwähnte kinetische Theorie mehratomiger Gase von Herrn Boltzmann ergibt $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_a$ für 2 atomige Gase, von welchem Resultat (auf eine Molekel bezogen) bereits auf Seite 19 Gebrauch gemacht wurde. Wir erhalten also

$$\Sigma r f(r) = 3p$$

Nimmt man nun wieder an, die Kraft $f(r)$ sei die elektrostatische Anziehung der Valenzladungen, und die Atome nur mit einer Bindung verknüpft, so ist $f(r) = \frac{\varepsilon^2}{r^2}$, und bei Einführung unserer früheren Bezeichnungen kann gesetzt werden $\Sigma r f(r) = N\varepsilon^2 \overline{\frac{1}{r}} \approx \frac{N\varepsilon^2}{\varrho}$.

Der Virialsatz ergibt dann

$$N\varepsilon^2 \approx 3 p \varrho$$

p ist gleich $1{,}01 \cdot 16^6$ Dynen pro cm^2; nimmt man wieder $N \approx 10^{20}$, $\varrho \approx 18^{-8}$ cm, so folgt

$$\varepsilon \approx 17 \cdot 10^{-12}\, cm^{\frac{3}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, sec^{-1}$$

---

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 470 ff., 1893.

Auch dieser Werth liegt wieder innerhalb der Grenzen der Unsicherheit des aus der Elektrolyse folgenden.

Die vorstehende Berechnung aus Virialsatz und Boltzmann's Theorie ist nicht unabhängig von derjenigen aus der Dissociationswärme nach der Gleichung $W = N\varepsilon^2 \overline{\frac{1}{r}}$. Denn hieraus und aus dem Virialsatz in der Form $3\,p = N\varepsilon^2 \overline{\frac{1}{r}}$ würde sich ergeben $W = 3\,p$, welche Bedingung aber nicht erfüllt ist. Vielmehr ist die Bedingung der Stabilität der Molekeln, wie ich an anderem Orte nachgewiesen habe,[1]) dass W gross sei gegen p und zwar so, dass $e^{\frac{W}{p}}$ gross ist gegen 1. Die Stabilitätsbedingung ist, wie a. a. O. gezeigt, in der That erfüllt, da $\frac{W}{p}$ für $N_2\,O_4$ gleich 25, für J_2 gleich 53, für H_2 gleich 478 ist. Unser jetziger Widerspruch gegen diese allgemein gültige und erfüllte Stabilitätsbedingung rührt davon her, dass wir zur Vereinfachung die Atome als Massenpunkte betrachteten und zwischen ihnen eine Kraft angenommen haben, welche einer Potenz der Entfernung proportional ist; dies ist, wie a. a. O. p. 477 nachgewiesen, unzulässig. Molekeln, deren Atome durch eine Newton'sche Kraft verbundene Massenpunkte wären, sind nicht stabil; eine einfache Rechnung, welche der a. a. O. p. 483 ff. analog ist, ergibt für solche Molekeln zwei Zustände, die an Wahrscheinlichkeit allen anderen weit überlegen sind: Entweder fallen die Atome dauernd in einen Punkt zusammen, oder sie sind soweit von einander entfernt, dass sie keine Kräfte auf einander ausüben, was der Dissociation entspricht.

Trotzdem kommt der Widerspruch für uns, bei der Berechnung des Elementarquantums ε nicht in Betracht, weil die Bedingung $e^{\frac{W}{p}}$ gross gegen 1 schon durch mässige

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 490 ff., 1893.

Werthe von $\frac{W}{p}$ erfüllt ist, und die Unsicherheit in unseren Berechnungen so gross ist, dass ihre Grenzen noch weit mehr verschiedene Werthe einschliessen. Von „Uebereinstimmung" kann von vornherein keine Rede sein, sondern nur von „Nichtwidersprechen".

VII. Vergleich mit den Lichtschwingungen.

Halten wir weiterhin wie bisher an der Annahme fest, dass wir die Atome als Punkte ansehen dürfen, welche im gasförmigen Zustande frei um einander beweglich sind. Ist dann nur die elektrostatische Kraft zwischen derselben wirksam, so kann die Dauer eines Umlaufs um den gemeinsamen Schwerpunkt aus der Gleichung angegeben werden, welche für die Planetenbewegung das 3. Keppler'sche Gesetz liefert; dabei werde angenommen, dass die beiden Atome der Molekel nur durch eine Valenz verbunden seien.

Wenn zwei Massenpunkte m_1 und m_2 unter dem Einflusse der Gravitationskraft

$$f(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

sich bewegen, so ist das 3. Keppler'sche Gesetz

$$\frac{4\pi^2 A_1^3}{T^2} = \frac{G m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

wo A_1 die grosse Halbaxe der Bahnellipse von m_1; T die Umlaufzeit ist.

Die elektrostatische Kraft ist $f(r) = \frac{\varepsilon^2}{r^2}$; also ist zu setzen $G m_1 m_2 = \varepsilon^2$; führen wir ferner die ganze grosse Axe $\mathfrak{A}_1 = 2A_1$ ein, so wird

$$T = \frac{\pi}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m_1}{2}}\sqrt{\mathfrak{A}_1^3}\,\frac{m_1 + m_2}{m_2}$$

Nehmen wir die beiden Atome als gleich an, so ist $m_1 = m_2 = m$, und auch der Index von $\mathfrak{A}_1$ fällt weg, da die beiden Bahnellipsen gleich werden; also

$$T = \frac{\pi}{\varepsilon} \sqrt{2\,m} \sqrt{\mathfrak{A}^3}$$

Bilden wir nun die Mittelwerthe über alle Molekeln in einem endlichen Volumen, so kann nach denselben Ueberlegungen, wie sie auf Seite 23 angestellt wurden, ohne Fehler in der Grössenordnung für die grosse Axe $\mathfrak{A}$ der Durchmesser einer Molekel gesetzt werden $\approx 10^{-8}$ cm. Der kleinste Werth für T ergibt sich bei Wasserstoff, wo $2\,m$, die Masse einer Molekel, den kleinsten Werth hat. Die Dichtigkeit des Wasserstoffs zu $895 \cdot 10^{-7}$ und die Zahl der Molekeln in 1 ccm zu 10^{20} angenommen, wird $2\,m \approx 89{,}5 \cdot 10^{-26}$. Für Wasserstoff wird daher

$$T \approx 23 \cdot 10^{-15} \text{ sec}$$

Stillschweigende Voraussetzung bei der Berechnung der mittleren Umlaufszeit T ist, dass die Zusammenstösse der Molekeln unter einander nicht so häufig stattfinden, dass eine regelmässige Centralbewegung der Atome um einander gar nicht zu Stande kommt. Jene Voraussetzung ist aber, wie die kinetische Gastheorie zeigt, erfüllt. Die grösste Stosszahl gilt für Wasserstoff, nämlich $95 \cdot 10^8$ in der Secunde;[1]) mithin die Zeit zwischen 2 Zusammenstössen $105 \cdot 10^{-12}$ sec. Also kommen bei Wasserstoff rund 4000 Umläufe der Atome um einander auf die Zeit zwischen 2 Zusammenstössen.

„Wenn nun eine positive und eine negative Ladung mit den beiden Atomen einer Molekel verbunden, sich um einander drehen, so ist ein solches System offenbar äquivalent einer elektrischen Schwingung. Von dem rotirenden Atompaar werden daher auch, wie von einer Hertz'schen Schwingung,

---

1) O. E. Meyer, kinet. Gastheorie, p. 142.

elektrodynamische Wellen ausgestrahlt, und bei hinreichender Schnelligkeit müssten dieselben vom Auge als Licht wahrgenommen werden. Da nun aber die Gase bei 0^0 nicht leuchten, muss die Schwingungsdauer jener elektrodynamischen Wellen grösser sein als die der langsamsten Lichtwellen. Für die äussersten rothen Wellen ist die Schwingungsdauer rund

$$\tau = 25 \cdot 10^{-16} \text{ sec}$$

Die Schwingungsdauer der elektrodynamischen Welle, welche die rotirende Molekel ausstrahlt, ist gleich der Umlaufszeit T; und, wie verlangt, ist der kleinste Werth für diese, wie er bei Wasserstoff sich ergibt, grösser als τ. Der Werth für T bei Wasserstoff ist aber nur 10 mal grösser als τ, und vielleicht dürfen wir daraus vermuthen, dass unter Umständen doch die betrachtete elektrodynamische Welle in den Bereich der Lichtwellen eingreift. Da nun T nur der Mittelwerth der verschiedenen bei verschiedenen Molekeln gleichzeitig vorhandenen Umlaufszeiten ist, so würde das Gas bei einer gegen die normale beschleunigten Umlaufszeit in der angegebenen Weise ein continuirliches Spectrum aussenden; vielleicht trägt die so erzeugte Strahlung mit bei zur Bildung des continuirlichen Hintergrundes im Spectrum der Gase, welchen auch Herr H. Kayser der „ungeordneten", also der Wärmebewegung der Atome zuschreibt.[1]) Wie dem aber auch sei, es würde auch jede andere hinreichend schnelle periodische Bewegung der Valenzladungen zu Lichtstrahlung Anlass geben; sei es, dass die Atome sammt ihren Ladungen als Ganzes oscilliren, wie dies wohl bei festen Körpern und den ein Bandenspectrum liefernden Gasen der Fall sein dürfte; sei es, dass die Schwingungen innerhalb der einzelnen Atome vor sich gehen, wie bei den ein Linienspectrum liefernden Gasen." Zu dieser Stelle aus meiner vorläufigen Mittheilung

---

1) H. Kayser, Lehrbuch der Spectralanalyse, p. 98.

vom 26. Januar 1891 habe ich nachzutragen, dass die Ansicht, der continuirliche Hintergrund der Gasspectra rühre von den Rotationen der Molekeln her, zuerst von Herrn Eilhard Wiedemann ausgesprochen ist;[1]) in derselben Arbeit führt Herr E. Wiedemann die continuirlichen Spectra bei glühenden festen Körpern oder Flüssigkeiten auf unfreie Schwingungen zurück; ferner wie schon früher Herr v. Helmholtz[2]) die Bandenspectren auf freie Schwingungen der Atome im Molekularverband unter dem Einflusse der gegenseitigen Kräfte der Atome, die Linienspectren auf freie Schwingungen der Aetherhüllen isolirter Atome.

Bezüglich der Energie, welche die in der Molekel oder im Atom oscillirenden Valenzladungen als Hertz'sche Schwingung ausstrahlen können, hat Herr H. Ebert nachgewiesen,[3]) dass dieselbe nicht im Widerspruch steht mit der von Herrn Eilhard Wiedemann gefundenen Strahlungsenergie eines Natriumatoms.[4]) Auch Herr G. J. Stoney schreibt das Leuchten den Bewegungen der Valenzladungen zu[5]) und discutirt die Strahlung, welche durch Oscillationen unter dem Einflusse elastischer Kräfte hervorgerufen wird.

VIII. Molekularer Magnetismus.

Wenn eine Valenzladung infolge der Wärmebewegung eine kreisförmige oder ähnlich gestaltete, eine Fläche umschliessende Bahn beschreibt, so wird sie nach aussen elektromagnetische Wirkung ausüben. Bei einer Bewegung wie bei dem bisher betrachteten Umlauf zweier als Punkte ge-

1) Eilh. Wiedemann, Wied. Ann. 5, p. 509, 1878; s. auch 10, p. 252, 1880.

2) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. 160, p. 182, 1877.

3) H. Ebert, Arch. de Genève (3) 25, p. 489, 15. Mai 1891; Wied. Ann. 49, p. 651, 1893.

4) Eilh. Wiedemann, Wiedem. Ann. 37, p. 177, 1889.

5) G. J. Stoney, Trans. Roy. Dublin Soc. 4, (2), p. 563, 1891.

dachter Atome von gleicher Masse um einander, müssen sich aber schon die elektromagnetischen Wirkungen der beiden Atome einer Molekel aufheben. Zunächst ist dies nicht mehr der Fall, wenn die beiden Atome der Molekel verschiedene Masse haben; dann wird die elektromagnetische Wirkung der mit dem leichteren Atom verbundenen Ladung wegen der grösseren von der Bahn umschlossenen Fläche überwiegen. Denken wir uns aber weiterhin das Atom als räumlich ausgedehnt, so sind auch noch andere rotationelle Bewegungen der Valenzladungen mit oder im Atom denkbar, deren magnetische Gesammtwirkung für eine Molekel sich nicht aufhebt.[1]) Endlich können wir uns bei festen Körpern und Flüssigkeiten die Atome einzeln und ihre Bewegung von einander unabhängig ausführend vorstellen, sodass wir uns als Grenzfall alle positiv geladenen Atome im einen Sinne, alle negativ geladenen Atome im entgegengesetzten Sinne rotirend, und alle Rotationsaxen parallel denken können, sodass sich in diesem Fall die magnetische Wirkung aller rotirenden Valenzladungen addiren würde. Hiedurch kommt man dazu, die Zulässigkeit dieser Erklärung des molekularen Magnetismus dadurch zu prüfen, dass man eine annähernde Berechnung für den maximalen specifischen Magnetismus bei Sättigung ausführen kann.

Diese Vorstellungen knüpfen sich von selbst an die Betrachtung der mit oder im Atom bewegten Valenzladungen an. Nachdem ich dieselben bereits seit längerer Zeit wiederholt gesprächsweise geäussert und die im Folgenden mitgetheilte Rechnung durchgeführt hatte, fand ich kürzlich im XI. Abschnitt des 2. Bandes der mechanischen Wärmetheorie

---

1) Schon bei einer aus 2 gleichen, räumlich ausgedehnten, Atomen bestehenden Gasmolekel zwingt die Verschiedenheit der Anziehung der ponderablen Masse für die beiden Arten der Elektricität zu der Folgerung einer unsymmetrischen Lagerung der $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$, woraus dann bei Rotation eine magnetische Gesammtwirkung resultirt.

von Clausius,[1]) dass schon Wilhelm Weber sich von den Ampère'schen Molekularströmen die Anschauung gebildet hatte, dass dieselben in kreisförmiger Bewegung eines positiven Elektricitätstheilchens um einen negativ elektrischen Kern bestehe,[2]) ohne dass jedoch Weber diese Elektricitätstheilchen mit den Jonenladungen identificirte.

Eine in Kreisbahn sich bewegende Elektricitätsmenge e kann bezüglich ihrer elektromagnetischen Wirkung als Kreisstrom aufgefasst werden. Als Stromintensität i ist dann einzuführen der Quotient aus Elektricitätsmenge, welche in einer Zeit T einen Punkt der Kreisperipherie passirt, dividirt durch T. In der dualistischen Theorie passiren beim Strom gleiche positive und negative Mengen in entgegengesetzter Richtung den Querschnitt. Bewegte Elektricität von einer Art allein repräsentirt in der elektrodynamischen Wirkung also nur die halbe Stromintensität.

Bewegt sich demnach eine Elektricitätsmenge e auf der Peripherie eines Kreises mit einer Umlaufszeit T, so ist sie elektromagnetisch äquivalent der Stromintensität $i = \frac{e}{2T}$.

Eine Valenzladung elektrostatisch gemessen ist annähernd $\varepsilon \approx 129 \cdot 10^{-12}$; also elektromagnetisch gemessen $\approx 43 \cdot 10^{-22}$. Eisen gilt als 4 werthig; die 4 Valenzstellen eines Eisenatoms als von gleicher Ladung vorausgesetzt würde also das obige $e \approx 172 \cdot 10^{-22}$ elektromagnetischen C. G. S.-Einheiten sein, wenn man sich alle 4 Ladungen in beliebiger Weise auf der Peripherie desselben Kreises, denselben in gleichem Sinne durchlaufend denkt.

Ein Kreisstrom von der Intensität i, welcher eine Fläche q umströmt, ist äquivalent einem Magneten vom Momente

$$\mathfrak{M} = i\,q$$

1) Clausius, mechan. Wärmetheorie II, p. 341/342, 1879.

2) Wilh. Weber, elektrodynam. Massbest., Leipzig 1871, p. 41.

Nehmen wir den Kreisstrom von molekularen Dimensionen, so können wir setzen $q \approx \delta^2$, wo δ die Kante des einem Eisenatom zukommenden Elementarwürfels ist. Hiefür erhalten wir folgenden angenäherten Werth.

Eine Molekel H_2 hat eine Masse von etwa $9 \cdot 10^{-25}$ g (siehe Seite 30). Ein Eisenatom $Fe = 56\,H = 28\,H_2$ also $25 \cdot 10^{-24}$ g. Das specifische Volumen des Eisens ist 1 ccm : 7,7 g. Daraus folgt das Volumen des einem Eisenatom zukommenden Elementarwürfels $33 \cdot 10^{-25}$ ccm, und die Kante desselben δ gleich $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm. Mithin $q \approx \delta^2 \approx 2{,}3 \cdot 10^{-16}$ cm².

Für das magnetische Moment eines Eisenatoms finden wir also die Annäherung:

$$\mathfrak{M} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-16} \cdot i \approx 2{,}3 \cdot 10^{-16} \cdot \frac{e}{2\,T}$$

und indem wir für e den obigen Wert einführen

$$\mathfrak{M} \approx \frac{2 \cdot 10^{-36}}{T}$$

Zu einer Schätzung der Grössenordnung der Umlaufszeit T können wir auf zwei Wegen gelangen. Erstens ist wie im vorigen Abschnitt daran zu erinnern, dass die rotirenden Valenzladungen elektrodynamische Wellen aussenden müssen. Wenn dieselben nicht als Licht empfunden werden sollen, so muss ihre Periode länger als die der längsten rothen Wellen sein; wir erhalten also

$$T > 3 \cdot 10^{-15} \text{ sec}$$

Zweitens soll als Grenzfall angenommen werden, die ponderable Masse des Eisenatoms sei mit der elektrischen Ladung desselben in einem Punkte vereinigt. Nach der kinetischen Theorie der Materie ist die mittlere lebendige Kraft eines Atoms bei gegebener Temperatur für alle Substanzen dieselbe. Gehen wir aus von einem einatomigen

Gase (etwa Hg), so ist die gesammte lebendige Kraft in 1 ccm bei 0° und Atmosphärendruck

$$\varDelta = \tfrac{3}{2}\,p = \tfrac{3}{2} \cdot 1{,}01 \cdot 10^{6} \text{ C. G. S.}$$

Division durch 10^{20} ergibt also für ein Atom beliebiger Substanz und Aggregatzustandes L die gesammte lebendige Kraft $\approx 1{,}52 \cdot 10^{-14}$. Nenne die Masse eines Eisenatoms m, die constante Geschwindigkeit, mit welcher es die kreisförmige Bahn vom Durchmesser d durchläuft, u, so wird

$$L = \frac{m}{2}u^2; \quad T = \frac{d\pi}{u} = d\pi \sqrt{\frac{m}{2L}}$$

Nehme $d \approx 10^{-8}$ cm; $m \approx 25 \cdot 10^{-24}$; $L \approx 1{,}52 \cdot 10^{-14}$ so folgt

$$T \approx 1{,}3 \cdot 10^{-12} \text{ sec}$$

Nun bewegt sich aber gewiss nicht die ganze ponderable Masse des Atoms auf der Oberfläche des ihm zukommenden Raumes, sondern befindet sich grösstentheils mehr central; damit derselbe Werth der lebendigen Kraft erreicht wird, muss also die Umdrehungsgeschwindigkeit grösser sein, und es sollte sein

$$T < 10^{-12} \text{ sec}$$

Schätzen wir nach diesen beiden Grenzwerthen etwa

$$T \approx 10^{-14} \text{ sec}$$

Herr H. E. J. G. Du Bois hat mir mitgetheilt, dass er in einer noch nicht publicirten Berechnung auf Grund der von Maxwell (Treatise Cap. 21) umgearbeiteten Lord Kelvin'schen Wirbeltheorie versucht habe, aus der magneto-optischen Drehung in ferromagnetischen Metallen (Kundt'sches Phänomen) einen Anhaltspunkt zu gewinnen für die Periode jener Wirbel. Nach den vorliegenden Daten gelange er zu dem Schlusse, dass in etwa halb-„gesättigtem" Eisen die

Wirbel eine Frequenz von 5 Billionen pro Secunde haben, also etwa der hundertste Theil derjenigen des Natronlichtes. Die Rechnung führe zu einer Schlussformel für die Periode, welche folgendermassen lautet:

$$T = 2{,}5 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{M}$$

wo M der maximale specifische Magnetismus ist.

Einmal stimmt der Bau dieser Gleichung mit der unsrigen überein; setzen wir zweitens den Werth für Eisen $M = 220$ (s. unten) ein, so wird bei voller Sättigung ungefähr

$$T = 10^{-13} \text{ sec}$$

Dieser Werth liegt innerhalb der sehr weiten Grenzen der Unsicherheit unseres oben gewählten Werthes.[1])

Führen wir in die Gleichung $\mathfrak{M} \approx \frac{2 \cdot 10^{-36}}{T}$ den Werth $T \approx 10^{-14}$ ein, so wird $\mathfrak{M} \approx 2 \cdot 10^{-22}$.

Will man zu endlichen Massen übergehen, so kann man annehmen, dass bei Sättigung alle positiven Valenzladungen um parallele Axen in demselben Sinne, alle negativen im entgegengesetzten Sinne rotiren. Dann muss das maximale magnetische Moment von 1 g Eisen, also der specifische Magnetismus bei Sättigung, gleich werden

$$M = \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M}$$

wo $\mathfrak{N}$ die Zahl der Atome in 1 g Eisen ist.

1) Wenn wir wieder daran denken, dass die periodische Bewegung der Valenzladungen zu elektrodynamischer Strahlung Anlass gibt, wie eine Hertz'sche Schwingung, so steht die Grössenordnung der Umlaufszeit ebenfalls in Einklang mit dem von Herrn Willy Wien abgeleiteten Resultate, dass die Periode der in der Wärmestrahlung fester Körper vorkommenden Schwingungen klein sein muss gegen diejenigen, welche von Drahtnetzen vollständig zurückgeworfen werden. (Wied. Ann. 49, p. 633, 1893.)

Aus $m \approx 25 \cdot 10^{-24}$ folgt $\mathfrak{N} \approx 4 \cdot 10^{22}$. Also wird

$$M \approx 8 \text{ C. G. S.-Einheiten}$$

Der experimentell gefundene specifische Magnetismus bei Sättigung beträgt[1])

bei Eisen	220	C. G. S.
bei Kobalt	150	„
bei Nickel	60	„

In Anbetracht der überaus grossen Unsicherheit der Berechnung von M muss man den berechneten und die direct bestimmten Werthe als innerhalb der Grössenordnung übereinstimmend bezeichnen. Der Versuch, den vor der Richtung der Elementarmagnete praeexistirenden molekularen Magnetismus auf Rotation der Valenzladungen zurückzuführen, scheint demnach zulässig zu sein.

Weitere Controlberechnungen der Helmholtz'schen elektrochemischen Theorie hat inzwischen Herr A. P. Chattock ausgeführt.[2]) In seiner ersten Mittheilung berechnet er aus den Erscheinungen beim Ausströmen der Elektricität aus Spitzen das Elementarquantum für die Atome des Gases. In der zweiten nimmt er an, dass die auch von älteren Theorieen der Dielectrica vorausgesetzten, in dasselbe eingebetteten Elektricitätstheilchen eben die Valenzladungen sind. Diese „elektrolytische Theorie der Dielectrica“ wendet Herr Chattock an auf die Messungen der Piezo-Elektricität der Herren J. und P. Curie und Mallock, der Pyro-Elektricität von Herrn Riecke, der Cohäsion, der Dielektricitäts-Constante, der Elektro-Striction, und findet stets Werthe für das Elementarquantum,

1) H. E. J. G. Du Bois, Phil. Mag. [5], 29, p. 293, 1890.

2) A. P. Chattock, Phil. Mag. (5), 32, p. 285, 1891; 34, p. 461, 1892; 35, p. 76, 1893.

die dem elektrolytischen nahe stehen. Auch Herr J. J. Thomson hat in mehreren neueren Arbeiten (siehe Citat p. 8) aus der Quantität der Jonenladungen mit Erfolg Schlüsse gezogen zur Erklärung verschiedener Phänomene, insbesondere auch des von Robert von Helmholtz gefundenen und von ihm und anderen untersuchten Dampfstrahlphänomens.

Zum Schlusse möchte ich mich nochmals im Voraus gegen die Auffassung verwahren, als ob ich mich der Täuschung hingäbe, irgend eine der entwickelten Berechnungen könne als positiv für die elektrochemische Theorie beweisend angesehen werden. Schon auf Seite 26 habe ich darauf hingewiesen, dass neben den elektrischen Kräften der Valenzladungen noch andere von derselben Grössenordnung existiren können, ohne dass unsere Gleichungen bei ihrer grossen Unsicherheit einen Widerspruch erkennen lassen würden. Wohl aber darf man behaupten, dass man bei Annahme der Helmholtz'schen Theorie eine Reihe von Erscheinungen unter gemeinsamem Gesichtspunkt auffassen kann, und bei der berechnenden Verfolgung, soweit dieselbe möglich ist, nicht in Widerspruch tritt mit der Erfahrung.



Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation 3. Ordnung.

Von Karl Döhlemann in München.

(Eingelaufen 18. Januar.)

1. Unter Voraussetzung des Begriffes der Projectivität kann man sich kaum eine einfachere Methode denken, den Raum geometrisch anschaulich eindeutig auf sich selbst zu beziehen als folgende: In dem einen Raum (X-Raum) seien 3 Gerade a_1, a_2, a_3 beliebig und in allgemeiner Lage angenommen, ebenso im andern, Y-Raum. Jede dieser 6 Geraden soll Träger eines Ebenenbüschels sein und zwar seien die Ebenenbüschel a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 je zu einander projectiv. Irgend ein Punkt im X-Raum, P_x, ist dann Schnittpunkt dreier Ebenen durch a_1, a_2, a_3; diesen entsprechen vermöge der projectiven Beziehungen drei Ebenen durch b_1, b_2, b_3, welche sich in dem entsprechenden Punkt P_y schneiden.

Lässt man P_x auf einer beliebigen Geraden g fortrücken, so bezieht P_x dabei die Büschel a_1, a_2, a_3 projectiv aufeinander. Es werden also auch die Büschel b_1, b_2, b_3 projectiv aufeinander bezogen und diese erzeugen als der Geraden entsprechendes Gebilde eine Raumkurve 3. Ordnung, welche den Hyperboloiden aus den Achsen b_1, b_2 bezw. b_1, b_3 und b_2, b_3 gemein ist.

Daraus folgt dann sofort, dass das einer Ebene im einen Raum im andern Raume entsprechende Gebilde eine Fläche

3. Ordnung ist: denn diess Gebilde hat mit einer beliebigen Geraden drei Schnittpunkte gemein.

2. Die singulären Elemente der Transformation erhalten wir durch besondere Annahmen für den Punkt P_x. Zunächst springen als solche die 6 Geraden $a_1, \ldots . b_3$ in die Augen. Wählen wir einen Punkt auf a_1, so geht durch ihn und a_2 bezw. a_3 noch je eine Ebene, während die durch a_1 gehende Ebene unbestimmt wird. Den beiden genannten Ebenen entsprechen gewisse Ebenen durch b_2 und b_3 und da die 3. Ebene ganz willkürlich, so entspricht also dem Punkte auf a_1 eine Gerade. Rückt der Punkt auf a_1 fort, so erzeugen die projectiven Büschel b_2 und b_3 eine Regelschaar 2. Ordnung, die wir kurz als das Hyperboloid $(b_2 b_3)$ bezeichnen wollen. Den Punkten der Geraden a_1 entsprechen die Erzeugenden dieses Hyperboloides und zwar diejenigen, welche nicht zur Schaar b_2, b_3 gehören.

Ganz ebenso geben die Geraden a_2 und a_3 zu 2 Hyperboloiden $(b_1 b_3)$ und $(b_1 b_2)$ Veranlassung, während im X-Raume als singuläre Flächen die Hyperboloide $(a_1 a_2)$ $(a_1 a_3)$ $(a_2 a_3)$ erscheinen.

Weiter spielen noch eine besondere Rolle die durch a_1, a_2, a_3, sowie b_1, b_2, b_3 bestimmten Regelschaaren. Wählt man nämlich eine Gerade g, welche a_1, a_2 und a_3 schneidet, so entspricht jedem Punkt dieser Geraden der gleiche Punkt im Y-Raum, da die Ebenen ja die nämlichen bleiben, welche g mit a_1, a_2 und a_3 bestimmt. Lässt man jetzt g die Regelschaar $(a_1 a_2 a_3)$ durchlaufen, so werden dadurch die Büschel a_1, a_2, a_3 aufeinander projectiv bezogen, das gleiche gilt also auch von den Büscheln b_1, b_2, b_3. Die den Geraden g entsprechenden Punkte liegen demnach auf einer Raumkurve 3. Ordnung R_b und es ist weiter klar, dass diese der gemeinsame Schnitt der oben genannten Hyperboloide $(b_1 b_2)$ $(b_1 b_3)$ $(b_2 b_3)$ sein muss. Ganz ebenso wird sich im Raume der X eine Raumkurve 3. Ordnung R_a ergeben, deren Punkte den

Geraden entsprechen, welche b_1, b_2 und b_3 gleichzeitig begegnen.

Das System der Fundamental-Flächen besteht also z. B. im X-Raume aus:

Dem Hyperboloid $(a_1 a_2)$, dem Hyperboloid $(a_1 a_3)$, dem Hyperboloid $(a_2 a_3)$, dem Hyperboloid $(a_1 a_2 a_3)$.

Dazu kommen als Fundamental-Kurven:

Die Geraden a_1, a_2, a_3 und die Raumkurve R_a, der Schnitt der 3 zuerst genannten Hyperboloide.

Es folgt dann leicht:

„Einer Ebene z. B. im X-Raume entspricht im Y-Raume eine Fläche 3. Ordnung, welche durch R_b, b_1, b_2 und b_3 hindurchgeht."

Diese Fläche ist auf die Ebene eindeutig abgebildet und aus der Betrachtung dieser Abbildung ergibt sich in der bekannten Weise, dass die Fläche 27 Gerade enthält.

3. Die analytische Darstellung dieser Transformation gestaltet sich wie folgt: Sind die Ebenenbüschel a_1, a_2, a_3 bezüglich gegeben durch

$$1) \qquad \begin{aligned} a_x - \lambda b_x &= o \\ A_x - \mu B_x &= o \\ A_x - \nu B_x &= o \end{aligned}$$

wo $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$ etc. und sind die dazu projectiven Büschel b_1, b_2, b_3 bezüglich

$$2) \qquad \begin{aligned} a'_y - \lambda b'_y &= o \\ A'_y - \mu B'_y &= o \\ A'_y - \nu B'_y &= o \end{aligned}$$

so werden die Gleichungen der Transformation

$$3) \qquad \begin{aligned} a_x b'_y - b_x a'_y &= o \\ A_x B'_y - B_x A'_y &= o \\ A_x B'_y - B_x A'_y &= o \end{aligned}$$

Diess sind 3 in den x und y lineare Gleichungen, allerdings von specieller Form. Nimmt man 3 bilineare Gleichungen der allgemeinen Form

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = o \quad \begin{Bmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{Bmatrix}$$

so erhält man durch dieselben die allgemeine birationale Transformation 3. Ordnung dieser Art, welche Nöther[1]) und Cayley[2]) fast gleichzeitig behandelt haben. Bei dieser tritt in jedem Raum als Fundamentalfläche eine Fläche 8. Ordnung auf und auf ihr als 3 fache Kurve eine Raumkurve 6. Ordnung. In unserm Falle ist diese Fläche 8. Ordnung in 4 Hyperboloide zerfallen, die Raumkurve 6. Ordnung dagegen besteht aus den 3 Geraden und der Raumkurve 3. Ordnung. Dieser geometrisch nicht uninteressante Fall findet in den citierten Arbeiten keine Erwähnung.

4. Die bilinearen Gleichungen 3) kann man mit Rücksicht auf ihre specielle Form als „zweiteilig" bezeichnen; die allgemeine Transformation dieser Art lässt sich nicht auf diese Form bringen. Betrachten wir, des Zusammenhanges wegen, einen Moment die allgemeine quadratische Transformation der Ebene, so ist bekannt, dass diese dargestellt werden kann durch das System 2 bilinearer Gleichungen

$$4) \quad \begin{matrix} \Sigma a_{ik} x_i y_k = o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k = o \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{Bmatrix}$$

Eine solche bilineare Form $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ lässt sich nun als „zweiteilige" schreiben immer und nur, wenn die Determinante der Form $|a_{ik}| = o$, wie diess London[3]) zeigt. Trotzdem lässt sich die allgemeine quadratische Transformation der Ebene noch durch zwei zweiteilige Gleichungen

1) Mathematische Annalen Bd. 3, 1871, pag. 547.
2) Proceedings of the London Mathem. Society, Vol. III, 1870.
3) Mathematische Annalen Bd. 38, 1891.

darstellen. Denn die Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i y_k = o$, welche eine reciproke Beziehung der Ebene vorstellt, wird erfüllt durch ∞^3 Punktpaare (x, y).

Hat man 2 solche Gleichungen wie in 4), so gibt es noch ∞^2 Punktepaare (x, y), welche bei den Gleichungen genügen und diess sind eben die Punktepaare der quadratischen Transformation. Darauf beruht auch die Erzeugung dieser Transformation, welche Hirst gegeben hat. Betrachtet man jetzt weiter die Schaar

$$5) \qquad \Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \cdot \Sigma b_{ik} x_i y_k = o$$

so stellt diese für jeden Wert von λ zwar eine andere Reciprocität vor, die Punktpaare der quadratischen Transformation jedoch gehören immer dieser Reciprocität an. Man kann dann die quadratische Transformation auch durch irgend 2 andere Reciprocitäten der Schaar 5) erzeugen und kann als solche 2 mit verschwindender Determinante herausgreifen. Denn die Determinante von 5) liefert eine Gleichung 3. Grades in λ. Eine solche Reciprocität ist aber dann als zweiteilige Form zu schreiben und diese kann wieder als Resultat der Elimination des Parameters aus projectiven Strahlbüscheln erhalten werden. So entsprechen also den 3 Wurzeln der kubischen Gleichung die 3 Fundamentalpunkte, welche die quadratische Transformation in jeder Ebene besitzt.

5. Anders verhält es sich im quaternären Gebiet. Verschwindet die Determinante $| a_{ik} |$ einer bilinearen Form von 4 homogenen Variabeln x und y,

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = o$$

so genügt diess blos dazu, um die Form als eine dreiteilige schreiben zu können. Denn ist

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + y_4 f_4(x)$$

so besagt das Verschwinden der Determinante $| a_{ik} |$, dass eine lineare Relation besteht

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + k_4 f_4 = o$$

und wenn man diese benutzt, um f_4 durch f_1, f_2, f_3 auszudrücken, so wird

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = f_1 \left(y_1 - \frac{k_1}{k_4} y_4\right) + f_2 \left(y_2 - \frac{k_2}{k_4} y_4\right) + f_3 \left(y_3 - \frac{k_3}{k_4} y_4\right)$$

Damit ist $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ als dreiteilige Form geschrieben.

Hat man jetzt 3 bilineare Formen allgemeiner Art

$$6) \qquad \begin{aligned} \Sigma a_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma c_{ik} x_i y_k &= o \end{aligned}$$

so wird jede einzelne derselben durch ∞^5 Punktpaare (x, y) befriedigt, die ∞^3 Punktpaare der durch 6 dargestellten Transformation jedoch sind diejenigen Punktpaare, welche den 3 Gleichungen genügen. Bildet man jetzt das System

$$7) \quad \Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \Sigma b_{ik} x_i y_k + \mu \Sigma c_{ik} x_i y_k = o$$

so enthält jede in ihm enthaltene Reciprocität die Punktpaare der Transformation. Die Bedingung, dass die Determinante vor 7) verschwinde, gibt eine Gleichung 4. Grades in λ und μ. Man kann also die Transformation 6) auch durch 3 dreiteilige Gleichungen darstellen.

Soll dagegen die Transformation durch 3 zweiteilige Gleichungen zum Ausdruck gebracht werden können, so ist dazu für jede der 3 bilinearen Formen ausser dem Verschwinden der Determinante $|a_{ik}|$ auch noch das Nullwerden der Unterdeterminanten 3. Ordnung notwendig und hinreichend.

Nahe liegt hier die Frage nach dem durch 2 bilineare Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma a_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k &= o \end{aligned}$$

dargestellten Gebilde. Offenbar gibt es noch ∞^4 Punktpaare, welche beiden Gleichungen genügen. Hält man z. B. x in

beiden Gleichungen fest, so erhält man 2 Ebenen, deren Schnittlinie der Ort der Punkte y ist, die dem Punkte x entsprechen. Alle auf diese Weise zu erhaltenden Geraden bilden einen Complex. Dadurch, dass die Ebenen einander entsprechen, welche in den beiden Reciprocitäten zu gleichen Werten von x (oder y) gehören, wird aber der Raum collinear auf sich bezogen und es folgt somit, dass der in Rede stehende Complex der Reye'sche oder tetraedrale, der ja durch 2 collineare Räume als Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen erzeugt wird. (Schröter's Complex der Wechselstrahlen.)

Die Gleichung des Complexes in den Plücker'schen Geradencoordinaten erhält man dadurch, dass man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{i1} y_i & \Sigma a_{i2} y_i & \Sigma a_{i3} y_i & \Sigma a_{i4} y_i \\ \Sigma a_{i1} y_i' & \Sigma a_{i2} y_i' & \Sigma a_{i3} y_i' & \Sigma a_{i4} y_i' \\ \Sigma b_{i1} y_i & \Sigma b_{i2} y_i & \Sigma b_{i3} y_i & \Sigma b_{i4} y_i \\ \Sigma b_{i1} y_i' & \Sigma b_{i2} y_i' & \Sigma b_{i3} y_i' & \Sigma b_{i4} y_i' \end{vmatrix} \quad \{i = 1, 2, 3, 4\}$$

nach quadratischen Unterdeterminanten entwickelt.

Der ganzen Schaar

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \Sigma b_{ik} x_i y_k = o$$

dient dieser Complex sozusagen als Basis. — Hat man allgemeiner 2 Gleichungen

$$f(x^m y^n) = o$$
$$\varphi(x^\mu y^\nu) = o$$

so stellen diese, insofern auch wieder einem Punkte x eine gewisse Kurve von der Ordnung $(n\nu)$ entspricht, ein ∞^3 faches System von Kurven vor, also einen allgemeinern Complex.

6. Kehren wir jetzt noch einen Moment zurück zu unserer speciellen Transformation 3. Ordnung. Wir hatten von Anfang an angenommen, es sei Büschel a_1 projectiv Büschel b_1, a_2 projectiv b_2 und ebenso a_3 und b_3. Diese

Projectivität kommt geometrisch zum Ausdruck dadurch, dass a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 je ein Hyperboloid erzeugen. Im allgemeinen haben diese 3 Flächen 8 Punkte gemein und diess sind die einzigen sich selbst entsprechenden Punkte der Transformation. Auch bei der allgemeinern Nöther-Cayley'schen Transformation hat man 8 solche Coincidenzpunkte. Man kann nun aber die erwähnten 3 Hyperboloide auch in specieller Lagenbeziehung annehmen. Von den verschiedenen möglichen Fällen sei nur der erwähnt, wo die 3 Hyperboloide eine Raumkurve 3. Ordnung R^3 gemein haben. Diess kommt darauf hinaus, dass man die 6 Achsen $a_1, \ldots b_3$ als Secanten einer R^3 wählt und je 2 Ebenenbüschel wie a_1 und b_1 perspectiv zur R^3 nimmt, sodass stets entsprechende Ebenen der Büschel auf dieser Kurve sich begegnen. Dann besteht die ganze R^3 aus Coincidenzpunkten der Transformation, dieselbe entspricht sich Punkt für Punkt selbst. Diese Transformation stellt das Analogon vor zu der quadratischen Transformation der Ebene mit einem festen Kegelschnitt.[1])

Wendet man unter Festhaltung der R^3 diese Transformation wiederholt an, so erhält man Transformationen in der Ordnung 3^λ, welche alle diese R^3 als „feste" Kurve enthalten.

Es drängt sich hier die Vermutung auf, dass man statt der R^3 überhaupt eine Raumkurve von beliebiger Ordnung n benützen kann, sofern man nur 6 $(n-1)$ fache Secanten derselben zur Verfügung hat, um dieselben als Gerade $a_1, \ldots b_3$ zu benützen. 6 solche $(n-1)$ fache Secanten liegen dann immer auf einer Regelfläche 2. Ordnung. Man überzeugt sich nämlich auch analytisch leicht von der Richtigkeit folgenden Satzes:

---

1) Vergleiche meine Arbeit in den Mathematischen Annalen Bd. 39, pag. 580.

„Enthält eine Raumkurve n-Ordnung zwei $(n-1)$ fache Secanten, so liegt sie auf einer Fläche 2. Ordnung und hat die eine Regelschaar derselben überhaupt zu $(n-1)$-fachen Secanten.“

Geometrisch ergibt sich der Beweis dieses Satzes unmittelbar, wenn man die zwei $(n-1)$ fachen Secanten der Raumkurve als Achsen zweier zur Raumkurve perspectiven und darum untereinander projectiven Ebenenbüschel nimmt, die dann eine Regelfläche 2. Ordnung F^2 erzeugen.

Unter dieser Voraussetzung gehören also die 6 Geraden $a_1, \ldots . b_3$ der gleichen Regelschaar F^2 an, auf welcher auch die R^n liegt. Die Hyperboloide, welche die Büschel a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 erzeugen, fallen alle drei zusammen mit F^2. Wählt man jetzt aber einen Punkt P_x auf dieser F^2, so entspricht ihm offenbar die durch ihn gehende, nicht zur Schaar der a_1 gehörige Erzeugende der Fläche F^2. Einer beliebigen Geraden g entspricht dann wieder eine Gerade, wenn man von den 2 Geraden absieht, die den Schnittpunkten der g mit der F^2 zuzuweisen sind. Man erkennt, dass die Transformation sich in diesem Falle auf eine Collineation reduciert.

Diess ist richtig, solange $n > 3$. Aber auch für $n = 3$ müssen wir dementsprechend, wenn R^3 eine „feste“ Kurve sein soll, noch die ausdrückliche Voraussetzung beifügen, dass die 6 Secanten $a_1, \ldots . b_3$ der R^3 nicht e i n e r Regelschaar angehören dürfen. Es folgt dann aber:

„Die R^3 ist die einzige Raumkurve, welche als „feste“ Kurve in unserer (speciellen) Transformation auftreten kann.“

Wählt man 2 der 3 Geraden in einem Raum z. B. b_1 und b_2 so, dass sie sich schneiden, so ist der Schnittpunkt derselben ein Doppelpunkt für die Fläche 3. Ordnung, welche einer Ebene im andern Raum entspricht. Auf diese Weise

kann man verschiedene Typen der Fläche 3. Ordnung durch die Transformation erhalten.

7. Sind die 3 bilinearen Gleichungen 6) allgemeiner Natur und setzt man in ihnen

$$a_{ik} = a_{ki}\,; \quad b_{ik} = b_{ki}\,; \quad c_{ik} = c_{ki}$$

so erhält man, wie Nöther l. c. pag. 556 bemerkt, die Hesse'sche Transformation, bei welcher jedem Punkte des Raumes sein conjugierter in Bezug auf ein Netz von Flächen 2. Ordnung entspricht. Denn die Gleichungen 6) lassen sich dann auffassen als die Polarebenen eines Punktes y in Bezug auf die 3 Flächen 2. Ordnung

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = o\,; \quad \Sigma\, b_{ik}\, x_i\, x_k = o\,; \quad \Sigma\, c_{ik}\, x_i\, x_k = o$$

Diese Raumtransformation ist natürlich involutorisch. Herr Professor Bauer hat mich nun, nachdem ich ihm diese Bemerkungen vorgelegt hatte, noch auf folgende weitere Specialisierung aufmerksam gemacht. Nimmt man statt der eben genannten Flächen 2. Ordnung 3 Ebenenpaare, so beschreiben die Polarebenen eines Punktes Ebenenbüschel um die 3 Schnittlinien eines jeden solchen Paares. In der Tat verschwinden unter dieser Voraussetzung für die Fläche 2. Ordnung ja ausser der Determinante auch noch die sämmtlichen Unterdeterminanten 3. Ordnung, sodass also die Form nach dem Frühern eben als zweiteilige darstellbar wird. Natürlich ist auch diese speciellste Transformation involutorisch. Die Geraden a_1, a_2, a_3 fallen zusammen mit b_1, b_2, b_3, wie überhaupt das System der singulären Elemente in beiden Räumen zusammenrückt.

Sitzung vom 3. Februar 1894.

1. Herr C. v. Kupffer teilt die Resultate seiner Untersuchungen: „über Monorhinie und Amphirhinie" mit.

2. Herr Ad. v. Baeyer hält einen Vortrag: „über Terpenthinöl".

Die Ergebnisse sollen an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

Ueber Monorhinie und Amphirhinie.

Von C. Kupffer.

(Eingelaufen 3. Februar.)

Die von Johannes Müller in seiner berühmten Monographie über die Myxinoïden als Cyclostomata zusammengefasste Gruppe der Kranioten nimmt nach ihrer gesammten Organisation jedenfalls eine sehr tiefe Stelle ein. Es fehlt ihnen jede Spur von paarigen Extremitäten und von Wirbelkörpern, wenn auch bei den erwachsenen geschlechtsreifen Petromyzonten in der bindegewebigen Scheide der Chorda dorsalis Anfänge oberer Wirbelbögen in Form unregelmässiger Knorpelstücke auftreten. Sehr eigenartig erscheint auch der Kiemenapparat. Aber diese Verhältnisse am Rumpfe sind bei der Frage, welche Stellung diesen Tieren im Systeme anzuweisen sei, von minderem Gewichte gewesen, als die Verhältnisse am Kopfe und hier namentlich der Mangel an Kiefern und die unpaarige, mit nur einer äusseren, dorsal gelegenen Oeffnung versehene Nase.

Ein Teil der Zoologen, unter diesen namentlich Ernst Häckel[1]) scheidet diese unpaarnasigen kieferlosen Kranioten (Monorhina oder Cyclostomata) ganz von den Fischen und betrachtet dieselben als Repräsentanten einer tief stehenden Seitenlinie, von welcher sich die mit den Fischen beginnende Hauptlinie der übrigen Kranioten, die als Kiefermäuler, Gnathostomen, auch als Paarnaser, Amphirhinen, bezeichnet werden, scharf absetze. — Andere Zoologen, ihnen voran Th. Huxley, gehen in der Scheidung lange nicht so weit. Huxley[2]) rechnet dieselben Tiere (Marsipobranchii) zu seiner Klasse der Fische und ist der Ansicht, dass ihnen nicht jede Spur von Kiefern fehle, sondern dass Teile ihres völlig ausgebildeten Kopfskelettes, wenn auch rudimentär, doch Teilen des Kiefergerüstes der Gnathostomen homolog seien. — Von unseren Kollegen steht Herr Kollege R. Hertwig[3]) mehr auf der Seite von Häckel, indem er in seinem Lehrbuch die Rundmäuler als besondere Klasse von der Klasse der Fische scheidet, während Herr Kollege von Zittel[4]) sich der Auffassung Huxley's anschliesst.

Ich habe mich in den letzten Jahren nach verschiedenen Seiten hin mit der Entwicklungsgeschichte einer Familie der Cyclostomen, der Petromyzonten beschäftigt und muss hervorheben, dass meine Beobachtungen der Hauptsache nach dahin auslaufen, den Abstand, der zwischen den Cyclostomen und Gnathostomen obzuwalten scheint, auszugleichen. Das gilt namentlich für die Verhältnisse am Kopfe, welchen die Hauptargumente für eine scharfe Sonderung beider Gruppen

---

1) E. Häckel, Natürliche Schöpfungsgeschichte, 8. Aufl., 1889, S. 598 ff. — Anthropogenie, 4. Aufl., 1891, S. 531 ff.

2) Th. Huxley, Journal of Anatomy and Physiology, Vol. X, 1876, p. 412.

3) R. Hertwig, Lehrbuch der Zoologie, 1. Aufl., II. Teil, S. 484.

4) K. v. Zittel, Handbuch der Palaeontologie, I. Abt., III. Bd., 1887, S. 56.

entnommen wurden. Der Kopf der Cyclostomen und Unpaarnaser ist nicht in dem Grade von dem Kopfe der Gnathostomen und Paarnaser verschieden, als es den Anschein hatte, denn die Embryonen und jungen Larven der Neunaugen zeigen die Anlagen von Kiefern und die Embryonen der paarnasigen Gnathostomen, bis zu den Säugetieren hin, weisen den reduzierten Rest einer unpaarigen Nasenanlage auf.

Besonders eignen sich die Embryonen der Neunaugen dazu, den zeitweiligen Bestand eines vordersten Darmteiles darzuthun, der zwar von einigen Embryologen hypothetisch vorausgesetzt, aber bisher nicht nachgewiesen war. Diesen Darmteil habe ich als präoralen Darm bezeichnet. Derselbe erstreckt sich bei diesen Embryonen vor der Bildung des Mundes an der Unterseite des Hirnes bis zu jenem Punkte des äusseren Keimblattes d. h. der Oberhaut, an welchem durch Einstülpung die Hypophysis entsteht. Dieser Punkt liegt ventral von der Platte, die die Anlage des unpaarigen Riechorgans darstellt. Weiter rückwärts und ventral bildet sich der Mund und mit der Ausdehnung dieses bei den jungen Larven der Neunaugen sehr geräumigen Blindsackes wird der präorale Darm von dem bleibenden Kiemendarme, gegen welchen der Mund sich eröffnet, abgetrennt. Der derart isolierte präorale Darm erfährt dann eine Rückbildung bis zum völligen Schwunde seiner Elemente. Früh aber, noch vor dem Auftreten des Mundes, entstehen an dem präoralen Darme, wie an der Region des Darmes, die als Kiemendarm sich erhält, seitliche symmetrische Ausstülpungen und zwischen diesen Taschen Bogenbildungen des mittleren Keimblattes. Diese Bildungen schliessen sich serial an einander und dürfen als homodynam gelten. Es entstehen also auch präorale Kiementaschen und präorale Kiemenbögen mit Aortenbögen. Erstere sind rudimentäre Bildungen und gehen mit dem präoralen Darme zu Grunde, die präoralen Kiemenbögen erhalten sich aber und verwachsen sekundär mit einander. Dieser

präoralen Taschen und Bögen zähle ich ursprünglich drei Paare. Aus dem vordersten deutlich nachweisbaren Bogenpaare entstehen Knorpel und Muskeln und zwar das Paar der knorpeligen Schädelbalken, sowie die Hauptmasse der Augenmuskeln, die also nicht dorsale Muskeln sind, wie bisher angenommen war, sondern ventrale, zur Kategorie der Kiemenmuskeln gehörige, mit denen sie auch histologisch übereinstimmen.

Huxley[1]) hat bereits 1869 in seinen Hunterian lectures es ausgesprochen, dass die Schädelbalken zu den ventralen Bogenbildungen, den Visceral- oder Kiemenbögen gehörten und diese Hypothese kann ich nunmehr embryologisch begründen. Auf den vordersten Bogen, den ich als Trabekularbogen bezeichne, folgen noch zwei Bogenpaare vor der vordersten postoralen Kiementasche, der Hyomandibulartasche, und dürfen darnach als Oberkiefergaumenbogen und als Unterkieferbogen bezeichnet werden, aber ihre Stellung ist bei den Neunaugen eine eigenartige. Der präorale Darm schnürt sich nämlich vor seiner Abtrennung stark ein und damit wird der unmittelbar vorn auf die Hyomandibulartasche folgende Bogen, der Unterkieferbogen, weit medialwärts und sogar vorwärts verlagert, so zwar, dass man, wenn dieser Vorgang nicht kontinuierlich verfolgt wird, den Palatinbogen für den Unterkieferbogen halten könnte. — Diese beiden hinteren Bogenpaare liefern bei den Ammocöten nicht Knorpel, sondern nur Muskeln und Bindegewebe und ich bin noch nicht in der Lage, ein Urteil darüber abgeben zu können, ob die von Huxley den Kieferbögen der Gnathostomen verglichenen knorpeligen Teile am Schädel der ausgebildeten Neunaugen diesen embryonalen Bögen entsprechen. Diese Entscheidung vorbehalten, ist aber jedenfalls soviel sicher, dass die Anlagen von

1) Hunterian lectures, in Medical times and Gazette, London 1869.

Kieferbögen den Cyclostomen in derselben Ausdehnung zukommen, wie den Gnathostomen.

Die unpaarige, eine mediane Oeffnung zeigende Nase der Cyclostomen hat verschiedene Deutungen erfahren. Die ursprüngliche Auffassung war die, dass das Organ einen einfachen median gelegenen Sack darstelle, von welchem aus ein Canal, der Nasengaumengang sich nach hinten erstrecke. Dieser Gang hört bei der Familie der Petromyzonten hinten blind auf, bei den Myxinoïden aber durchbricht der Canal das Dach des Darmrohres und kommuniziert frei mit demselben. Götte hat nun dargethan, dass ein Rest dieses Nasengaumenganges der Unpaarnaser sich als der sogenannte Hirnanhang, die Hypophysis, bei den Paarnasern erhalte, und A. Dohrn wies nach, dass das Riechorgan und der Gang genetisch gesondert werden müssen. Beide Teile bilden sich getrennt, das Riechorgan mehr dorsal und der Gang, der nunmehr als Hypophysis bezeichnet wird, entsteht ursprünglich näher dem Munde, als der Nase, aber indem mit diesen Organen die sie trennende Partie der Oberhaut mit eingestülpt wird, erhalten beide eine gemeinsame äussere Oeffnung. — Noch vor der Publikation Dohrn's hatte bereits Calberla auf der Naturforscher-Versammlung in München 1877 darauf hingewiesen, dass Nase und Hypophysis als getrennte Grübchen auftreten. Calberla[1]) fügte daran weitere Aufschlüsse. Er gab an, dass der Riechsack nicht unpaarig ist, sondern durch ein von der oberen Wand ausgehendes Septum in zwei symmetrische Abteilungen geschieden werde, zu welchen durch besondere Oeffnungen der knorpeligen Kapsel des Organs die von vorn herein paarigen Riechnerven treten. Bei der Umwandlung der Larve zum Geschlechtstier werde die Scheide-

---

1) Calberla, Zur Entwicklungsgeschichte des Petromyzon. Amtlicher Bericht der 50. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in München, 1877, S. 188.

wand knorpelig. Die Duplicität sei also nicht zu verkennen und es müssten deshalb die Petromyzonten als Amphirhinen bezeichnet werden. Götte, der dem Vortrage beiwohnte, bestätigte diese Angaben. In der That lässt sich das Septum leicht nachweisen, nur ist es nicht vom Beginne der Einstülpung an da, wie Calberla angab, selbst 5—6 mm lange Larven von P. Planeri zeigen noch keine Spur dieser Teilung. Ebenso unrichtig ist es, wenn Calberla den Nasengaumengang, d. h. die Hypophysis, erst paarig entstehen und nachträglich aus der Vereinigung einer doppelten Einstülpung den unpaarigen Gang sich bilden lässt.

In neuester Zeit hat sich W. His[1]) über das Riechorgan von Petromyzon ausgesprochen und eine Abbildung des Organs mit den beiden Riechnerven nach einem Frontalschnitte gegeben. His bezeichnet das Organ als paarig und die zu beiden Seiten des Septum gelegenen Buchten als die symmetrisch angelegten Riechgruben, zu welchen die Riechnerven vom Hirne aus divergierend sich erstrecken. Ganz zutreffend hebt er aber hervor, dass diese Höhle mit ihrer einfachen Eingangsöffnung der Nasenhöhle der übrigen Wirbeltiere morphologisch nicht gleichwertig ist. Er meint, dieselbe wäre wohl am besten als Gesichtshöhle zu bezeichnen und ihre Rückwand entspräche der Stirn- und oberen Gesichtsfläche anderer Wirbeltiere. — Ob nun die beiden Riechgruben von Petromyzon den Riechgruben der Amphirhinen morphologisch gleichwertig zu erachten seien, darüber äussert His sich nicht.

Wenn man nun weiss, dass die erste Anlage des Riech-

---

1) W. His, Die Entwicklung der menschlichen und tierischer Physiognomien. Archiv für Anatomie und Physiologie, Anat. Abt., 1892, S. 421.

Derselbe, Ueber das frontale Ende des Gehirnrohres. Daselbst, 1893, S. 163.

organs bei Petromyzon durchaus nicht paarige Einstülpungen zeigt, sondern eine einfache Epidermisplatte darstellt, die ohne irgend welche Unterbrechung über die Mittelebene sich hinweg erstreckt, in der Mitte keine Leiste, noch sonst eine die beiden Hälften trennende Marke zeigt, so bleiben für die Deutung des weiter entwickelten Organs und seiner Teile Unklarheiten bestehen und es wird erforderlich, die Entwicklungsgeschichte eingehender zu Rate zu ziehen. Das kann nicht geschehen, ohne dass zugleich die Entwicklung der Kopfnerven überhaupt Berücksichtigung fände, deren vorderstes Paar die beiden Riechnerven darstellen.

Der Entwicklungsgang der Kopfnerven und ihrer Ganglien ist ein komplizierter, es beteiligen sich daran Anlagen verschiedener Herkunft, je eine centrogene und eine kutane, die letztere wird von einer verdickten Platte resp. einem Wulst oder Hügel der Oberhaut geliefert. Die centrogene Anlage, aus der dorsalen Neuralleiste des Centralorgans hervorgehend, erreicht die entsprechende kutane Anlage, dann löst sich die tiefere Zellenschicht der letzteren ab und vereinigt sich mit der centrogenen Anlage zur Bildung eines Ganglions des betreffenden Nerven. Es findet also bei der Bildung der Kopfganglien eine centripetale Verlagerung von ursprünglich peripheren Zellen statt, die den Wert von Nervenzellen haben. Nun wäre es bequem, diese Verdickungen der Oberhaut, die sich an der Ganglienbildung beteiligen, einheitlich zu bezeichnen. Ich schlage dafür den Ausdruck Plakode[1]) vor. — Es bilden sich am Kopfe zwei Reihen solcher Plakoden, eine dorso-laterale Reihe und eine epibranchiale. Beide Reihen konvergieren nach vorn gegen eine vordere terminale Plakode, die sich sowohl bei Monorhinen, wie bei Amphirhinen findet. Bei den Monorhinen, speziell bei Petromyzon stellt dieselbe die Anlage des un-

---

1) *Πλακώδης, ες,* kuchenartig, plattenartig.

paarigen Riechorgans dar und wird eingestülpt; bei den Amphirhinen ist dieselbe zeitweilig vorhanden; ich[1]) habe sie bei vielen Knorpelganoiden, beim Frosch, ja bei Säugetieren nachgewiesen. Schafembryonen, an denen die Rachenhaut noch nicht gegen den Darm durchgebrochen ist, zeigen dieselbe in starker Ausbildung. Später aber verschwindet diese unpaarige Riechplakode bei den Amphirhinen, ihre Stelle würde der unteren mittleren Stirnregion entsprechen. Diese terminale Plakode beansprucht noch ein weiteres Interesse, insofern sie das Feld darstellt, innerhalb welches das Hirn vor seiner vollständigen Isolation mit der Oberhaut zusammenhängt und entweder durch ein Loch nach aussen mündet oder durch einen massiven Strang befestigt ist. Diese letzte Verbindungsstelle ist das vordere Axenende des Hirnes. Damit ergiebt sich ein Anschluss an Amphioxus, bei welchem Tiere ja noch spät das Neuralrohr vorn eine Oeffnung besitzt, den vorderen Neuralporus, der sich innerhalb eines trichterförmig eingesenkten Feldes der Oberhaut befindet, einer Grube, die bereits vor Decennien von Kölliker als unpaarige Riechgrube beschrieben worden ist. Auch dort aber ist die Verbindung und Communication des Hirnes mit diesem Sinnesorgan keine bleibende, das Hirn trennt sich von der Grube, bleibt aber mit dem Boden derselben in Berührung.

So zeigt sich in einem wesentlichen Punkte Uebereinstimmung von Amphioxus an bis zu den Amnioten: das Ende der Hirnaxe läuft vorn gegen eine terminale Plakode aus, welche sich bei Amphioxus und den Monorhinen zu einem Sinnesorgan gestaltet, bei den Amphirhinen als Rudiment des gleichen Organs sich bis zum völligen Schwunde zurückbildet.

Da dieses terminale Organ bei Amphioxus am wahr-

---

1) Studien zur vergl. Entwicklungsgeschichte des Kopfes der Kranioten, München 1893, S. 77.

scheinlichsten als Riechorgan gedeutet werden kann und da dieselbe Plakode bei den Monorhinen in die Bildung des allgemein als Riechorgan aufgefassten Sackes übergeht, so habe ich dieselbe als unpaarige Riechplakode bezeichnet.

An diese schliesst sich in der dorso-lateralen Reihe bei allen Amphirhinen dasjenige Plakodenpaar an, aus welchem die paarigen Riechgrübchen sich bilden, dann folgt das Paar, welches sich an der Bildung des vorderen Trigeminusganglions beteiligt und weiter die Plakoden für die übrigen Hauptganglien. In der zweiten, weiter ventral gelegenen, epibranchialen Reihe, folgt auf die unpaarige Riechplakode diejenige, aus welcher die Linse entsteht und in engstem Anschlusse an letztere abermals Ganglienplakoden.

Alle drei Riechplakoden haben das gemeinsam, dass aus denselben keine Ganglien entstehen, sondern dass ihre Nervenzellen, wie die Histiologie heute lehrt, peripher im Epithel des Sinnesorgans verbleiben.

Aus den paarigen Riechgruben entwickeln sich, wie Kölliker und His beobachtet haben, die paarigen Riechnerven in centripetaler Richtung. Ein unpaarer Riechnerv tritt bei den Amphirhinen nicht auf. — Bei Petromyzon besteht bei ganz jungen Larven von $3^1/_2$—4 mm Länge ein bald verschwindender medianer, einige Kerne enthaltender Fibrillenstrang, der die Kuppe des Riechsackes mit dem vordersten Hirnende, dem lobus olfactorius impar verbindet. Wenn derselbe verschwindet, leitet sich die Bildung der paarigen Riechnerven ein und diese sind ohne Zweifel den paarigen Riechnerven der Amphirhinen homolog.

Nun besteht also die Schwierigkeit für die Vergleichung, dass das gleiche Nervenpaar bei den Amphirhinen den paarig auftretenden Riechgruben, bei den Monorhinen dem zunächst jedenfalls unpaarig erscheinenden Riechsacke angehört. Es wirft sich also die Frage auf, ob bei den Monorhinen, speziell bei Petromyzon neben der unpaarigen noch paarige Riech-

kann man verschiedene Typen der Fläche 3. Ordnung durch die Transformation erhalten.

7. Sind die 3 bilinearen Gleichungen 6) allgemeiner Natur und setzt man in ihnen

$$a_{ik} = a_{ki}\,; \quad b_{ik} = b_{ki}\,; \quad c_{ik} = c_{ki}$$

so erhält man, wie Nöther l. c. pag. 556 bemerkt, die Hesse'sche Transformation, bei welcher jedem Punkte des Raumes sein conjugierter in Bezug auf ein Netz von Flächen 2. Ordnung entspricht. Denn die Gleichungen 6) lassen sich dann auffassen als die Polarebenen eines Punktes y in Bezug auf die 3 Flächen 2. Ordnung

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,; \quad \Sigma\, b_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,; \quad \Sigma\, c_{ik}\, x_i\, x_k = 0$$

Diese Raumtransformation ist natürlich involutorisch. Herr Professor Bauer hat mich nun, nachdem ich ihm diese Bemerkungen vorgelegt hatte, noch auf folgende weitere Specialisierung aufmerksam gemacht. Nimmt man statt der eben genannten Flächen 2. Ordnung 3 Ebenenpaare, so beschreiben die Polarebenen eines Punktes Ebenenbüschel um die 3 Schnittlinien eines jeden solchen Paares. In der Tat verschwinden unter dieser Voraussetzung für die Fläche 2. Ordnung ja ausser der Determinante auch noch die sämmtlichen Unterdeterminanten 3. Ordnung, sodass also die Form nach dem Frühern eben als zweiteilige darstellbar wird. Natürlich ist auch diese speciellste Transformation involutorisch. Die Geraden a_1, a_2, a_3 fallen zusammen mit b_1, b_2, b_3, wie überhaupt das System der singulären Elemente in beiden Räumen zusammenrückt.

Sitzung vom 3. Februar 1894.

1. Herr C. v. KUPFFER teilt die Resultate seiner Untersuchungen: „über Monorhinie und Amphirhinie" mit.

2. Herr AD. v. BAEYER hält einen Vortrag: „über Terpenthinöl".

Die Ergebnisse sollen an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

Ueber Monorhinie und Amphirhinie.

Von C. Kupffer.

(Eingelaufen 3. Februar.)

Die von Johannes Müller in seiner berühmten Monographie über die Myxinoïden als Cyclostomata zusammengefasste Gruppe der Kranioten nimmt nach ihrer gesammten Organisation jedenfalls eine sehr tiefe Stelle ein. Es fehlt ihnen jede Spur von paarigen Extremitäten und von Wirbelkörpern, wenn auch bei den erwachsenen geschlechtsreifen Petromyzonten in der bindegewebigen Scheide der Chorda dorsalis Anfänge oberer Wirbelbögen in Form unregelmässiger Knorpelstücke auftreten. Sehr eigenartig erscheint auch der Kiemenapparat. Aber diese Verhältnisse am Rumpfe sind bei der Frage, welche Stellung diesen Tieren im Systeme anzuweisen sei, von minderem Gewichte gewesen, als die Verhältnisse am Kopfe und hier namentlich der Mangel an Kiefern und die unpaarige, mit nur einer äusseren, dorsal gelegenen Oeffnung versehene Nase.

Ein Teil der Zoologen, unter diesen namentlich Ernst Häckel[1]) scheidet diese unpaarnasigen kieferlosen Kranioten (Monorhina oder Cyclostomata) ganz von den Fischen und betrachtet dieselben als Repräsentanten einer tief stehenden Seitenlinie, von welcher sich die mit den Fischen beginnende Hauptlinie der übrigen Kranioten, die als Kiefermäuler, Gnathostomen, auch als Paarnaser, Amphirhinen, bezeichnet werden, scharf absetze. — Andere Zoologen, ihnen voran Th. Huxley, gehen in der Scheidung lange nicht so weit. Huxley[2]) rechnet dieselben Tiere (Marsipobranchii) zu seiner Klasse der Fische und ist der Ansicht, dass ihnen nicht jede Spur von Kiefern fehle, sondern dass Teile ihres völlig ausgebildeten Kopfskelettes, wenn auch rudimentär, doch Teilen des Kiefergerüstes der Gnathostomen homolog seien. — Von unseren Kollegen steht Herr Kollege R. Hertwig[3]) mehr auf der Seite von Häckel, indem er in seinem Lehrbuch die Rundmäuler als besondere Klasse von der Klasse der Fische scheidet, während Herr Kollege von Zittel[4]) sich der Auffassung Huxley's anschliesst.

Ich habe mich in den letzten Jahren nach verschiedenen Seiten hin mit der Entwicklungsgeschichte einer Familie der Cyclostomen, der Petromyzonten beschäftigt und muss hervorheben, dass meine Beobachtungen der Hauptsache nach dahin auslaufen, den Abstand, der zwischen den Cyclostomen und Gnathostomen obzuwalten scheint, auszugleichen. Das gilt namentlich für die Verhältnisse am Kopfe, welchen die Hauptargumente für eine scharfe Sonderung beider Gruppen

---

1) E. Häckel, Natürliche Schöpfungsgeschichte, 8. Aufl., 1889, S. 598 ff. — Anthropogenie, 4. Aufl., 1891, S. 531 ff.

2) Th. Huxley, Journal of Anatomy and Physiology, Vol. X, 1876, p. 412.

3) R. Hertwig, Lehrbuch der Zoologie, 1. Aufl., II. Teil, S. 484.

4) K. v. Zittel, Handbuch der Palaeontologie, I. Abt., III. Bd., 1887, S. 56.

entnommen wurden. Der Kopf der Cyclostomen und Unpaarnaser ist nicht in dem Grade von dem Kopfe der Gnathostomen und Paarnaser verschieden, als es den Anschein hatte, denn die Embryonen und jungen Larven der Neunaugen zeigen die Anlagen von Kiefern und die Embryonen der paarnasigen Gnathostomen, bis zu den Säugetieren hin, weisen den reduzierten Rest einer unpaarigen Nasenanlage auf.

Besonders eignen sich die Embryonen der Neunaugen dazu, den zeitweiligen Bestand eines vordersten Darmteiles darzuthun, der zwar von einigen Embryologen hypothetisch vorausgesetzt, aber bisher nicht nachgewiesen war. Diesen Darmteil habe ich als präoralen Darm bezeichnet. Derselbe erstreckt sich bei diesen Embryonen vor der Bildung des Mundes an der Unterseite des Hirnes bis zu jenem Punkte des äusseren Keimblattes d. h. der Oberhaut, an welchem durch Einstülpung die Hypophysis entsteht. Dieser Punkt liegt ventral von der Platte, die die Anlage des unpaarigen Riechorgans darstellt. Weiter rückwärts und ventral bildet sich der Mund und mit der Ausdehnung dieses bei den jungen Larven der Neunaugen sehr geräumigen Blindsackes wird der präorale Darm von dem bleibenden Kiemendarme, gegen welchen der Mund sich eröffnet, abgetrennt. Der derart isolierte präorale Darm erfährt dann eine Rückbildung bis zum völligen Schwunde seiner Elemente. Früh aber, noch vor dem Auftreten des Mundes, entstehen an dem präoralen Darme, wie an der Region des Darmes, die als Kiemendarm sich erhält, seitliche symmetrische Ausstülpungen und zwischen diesen Taschen Bogenbildungen des mittleren Keimblattes. Diese Bildungen schliessen sich serial an einander und dürfen als homodynam gelten. Es entstehen also auch präorale Kiementaschen und präorale Kiemenbögen mit Aortenbögen. Erstere sind rudimentäre Bildungen und gehen mit dem präoralen Darme zu Grunde, die präoralen Kiemenbögen erhalten sich aber und verwachsen sekundär mit einander. Dieser

präoralen Taschen und Bögen zähle ich ursprünglich drei Paare. Aus dem vordersten deutlich nachweisbaren Bogenpaare entstehen Knorpel und Muskeln und zwar das Paar der knorpeligen Schädelbalken, sowie die Hauptmasse der Augenmuskeln, die also nicht dorsale Muskeln sind, wie bisher angenommen war, sondern ventrale, zur Kategorie der Kiemenmuskeln gehörige, mit denen sie auch histologisch übereinstimmen.

Huxley[1]) hat bereits 1869 in seinen Hunterian lectures es ausgesprochen, dass die Schädelbalken zu den ventralen Bogenbildungen, den Visceral- oder Kiemenbögen gehörten und diese Hypothese kann ich nunmehr embryologisch begründen. Auf den vordersten Bogen, den ich als Trabekularbogen bezeichne, folgen noch zwei Bogenpaare vor der vordersten postoralen Kiementasche, der Hyomandibulartasche, und dürfen darnach als Oberkiefergaumenbogen und als Unterkieferbogen bezeichnet werden, aber ihre Stellung ist bei den Neunaugen eine eigenartige. Der präorale Darm schnürt sich nämlich vor seiner Abtrennung stark ein und damit wird der unmittelbar vorn auf die Hyomandibulartasche folgende Bogen, der Unterkieferbogen, weit medialwärts und sogar vorwärts verlagert, so zwar, dass man, wenn dieser Vorgang nicht kontinuierlich verfolgt wird, den Palatinbogen für den Unterkieferbogen halten könnte. — Diese beiden hinteren Bogenpaare liefern bei den Ammocöten nicht Knorpel, sondern nur Muskeln und Bindegewebe und ich bin noch nicht in der Lage, ein Urteil darüber abgeben zu können, ob die von Huxley den Kieferbögen der Gnathostomen verglichenen knorpeligen Teile am Schädel der ausgebildeten Neunaugen diesen embryonalen Bögen entsprechen. Diese Entscheidung vorbehalten, ist aber jedenfalls soviel sicher, dass die Anlagen von

1) Hunterian lectures, in Medical times and Gazette, London 1869.

Kieferbögen den Cyclostomen in derselben Ausdehnung zukommen, wie den Gnathostomen.

Die unpaarige, eine mediane Oeffnung zeigende Nase der Cyclostomen hat verschiedene Deutungen erfahren. Die ursprüngliche Auffassung war die, dass das Organ einen einfachen median gelegenen Sack darstelle, von welchem aus ein Canal, der Nasengaumengang sich nach hinten erstrecke. Dieser Gang hört bei der Familie der Petromyzonten hinten blind auf, bei den Myxinoïden aber durchbricht der Canal das Dach des Darmrohres und kommuniziert frei mit demselben. Götte hat nun dargethan, dass ein Rest dieses Nasengaumenganges der Unpaarnaser sich als der sogenannte Hirnanhang, die Hypophysis, bei den Paarnasern erhalte, und A. Dohrn wies nach, dass das Riechorgan und der Gang genetisch gesondert werden müssen. Beide Teile bilden sich getrennt, das Riechorgan mehr dorsal und der Gang, der nunmehr als Hypophysis bezeichnet wird, entsteht ursprünglich näher dem Munde, als der Nase, aber indem mit diesen Organen die sie trennende Partie der Oberhaut mit eingestülpt wird, erhalten beide eine gemeinsame äussere Oeffnung. — Noch vor der Publikation Dohrn's hatte bereits Calberla auf der Naturforscher-Versammlung in München 1877 darauf hingewiesen, dass Nase und Hypophysis als getrennte Grübchen auftreten. Calberla[1]) fügte daran weitere Aufschlüsse. Er gab an, dass der Riechsack nicht unpaarig ist, sondern durch ein von der oberen Wand ausgehendes Septum in zwei symmetrische Abteilungen geschieden werde, zu welchen durch besondere Oeffnungen der knorpeligen Kapsel des Organs die von vorn herein paarigen Riechnerven treten. Bei der Umwandlung der Larve zum Geschlechtstier werde die Scheide-

---

1) Calberla, Zur Entwicklungsgeschichte des Petromyzon. Amtlicher Bericht der 50. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in München, 1877, S. 188.

wand knorpelig. Die Duplicität sei also nicht zu verkennen und es müssten deshalb die Petromyzonten als Amphirhinen bezeichnet werden. Götte, der dem Vortrage beiwohnte, bestätigte diese Angaben. In der That lässt sich das Septum leicht nachweisen, nur ist es nicht vom Beginne der Einstülpung an da, wie Calberla angab, selbst 5—6 mm lange Larven von P. Planeri zeigen noch keine Spur dieser Teilung. Ebenso unrichtig ist es, wenn Calberla den Nasengaumengang, d. h. die Hypophysis, erst paarig entstehen und nachträglich aus der Vereinigung einer doppelten Einstülpung den unpaarigen Gang sich bilden lässt.

In neuester Zeit hat sich W. His[1]) über das Riechorgan von Petromyzon ausgesprochen und eine Abbildung des Organs mit den beiden Riechnerven nach einem Frontalschnitte gegeben. His bezeichnet das Organ als paarig und die zu beiden Seiten des Septum gelegenen Buchten als die symmetrisch angelegten Riechgruben, zu welchen die Riechnerven vom Hirne aus divergierend sich erstrecken. Ganz zutreffend hebt er aber hervor, dass diese Höhle mit ihrer einfachen Eingangsöffnung der Nasenhöhle der übrigen Wirbeltiere morphologisch nicht gleichwertig ist. Er meint, dieselbe wäre wohl am besten als Gesichtshöhle zu bezeichnen und ihre Rückwand entspräche der Stirn- und oberen Gesichtsfläche anderer Wirbeltiere. — Ob nun die beiden Riechgruben von Petromyzon den Riechgruben der Amphirhinen morphologisch gleichwertig zu erachten seien, darüber äussert His sich nicht.

Wenn man nun weiss, dass die erste Anlage des Riech-

1) W. His, Die Entwicklung der menschlichen und tierischer Physiognomien. Archiv für Anatomie und Physiologie, Anat. Abt., 1892, S. 421.

Derselbe, Ueber das frontale Ende des Gehirnrohres. Daselbst, 1893, S. 163.

organs bei Petromyzon durchaus nicht paarige Einstülpungen zeigt, sondern eine einfache Epidermisplatte darstellt, die ohne irgend welche Unterbrechung über die Mittelebene sich hinweg erstreckt, in der Mitte keine Leiste, noch sonst eine die beiden Hälften trennende Marke zeigt, so bleiben für die Deutung des weiter entwickelten Organs und seiner Teile Unklarheiten bestehen und es wird erforderlich, die Entwicklungsgeschichte eingehender zu Rate zu ziehen. Das kann nicht geschehen, ohne dass zugleich die Entwicklung der Kopfnerven überhaupt Berücksichtigung fände, deren vorderstes Paar die beiden Riechnerven darstellen.

Der Entwicklungsgang der Kopfnerven und ihrer Ganglien ist ein komplizierter, es beteiligen sich daran Anlagen verschiedener Herkunft, je eine centrogene und eine kutane, die letztere wird von einer verdickten Platte resp. einem Wulst oder Hügel der Oberhaut geliefert. Die centrogene Anlage, aus der dorsalen Neuralleiste des Centralorgans hervorgehend, erreicht die entsprechende kutane Anlage, dann löst sich die tiefere Zellenschicht der letzteren ab und vereinigt sich mit der centrogenen Anlage zur Bildung eines Ganglions des betreffenden Nerven. Es findet also bei der Bildung der Kopfganglien eine centripetale Verlagerung von ursprünglich peripheren Zellen statt, die den Wert von Nervenzellen haben. Nun wäre es bequem, diese Verdickungen der Oberhaut, die sich an der Ganglienbildung beteiligen, einheitlich zu bezeichnen. Ich schlage dafür den Ausdruck Plakode[1]) vor. — Es bilden sich am Kopfe zwei Reihen solcher Plakoden, eine dorso-laterale Reihe und eine epibranchiale. Beide Reihen konvergieren nach vorn gegen eine vordere terminale Plakode, die sich sowohl bei Monorhinen, wie bei Amphirhinen findet. Bei den Monorhinen, speziell bei Petromyzon stellt dieselbe die Anlage des un-

1) *Πλακώδης, ες,* kuchenartig, plattenartig.

Wenn wir das Elektrometer in Doppelschaltung mit dem erwähnten isolirten Pole verbinden, so muss der Ausschlag, wie es ganz einfache Betrachtungen zeigen, gleich sein

$$\alpha = a \cdot \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v^2\, dt.$$

Das heisst: bei Anwendung der Doppelschaltung zur Energiemessung von Wechselströmen ist der Ausschlag von der Constanten b unabhängig (c aber ist einfach vernachlässigt worden). Für diesen Fall gilt also anstatt (1) eine einfachere Formel

$$\alpha = a w^2, \tag{2}$$

wo w^2 — das mittlere Quadrat des oscillirenden Potentials v bedeutet. Natürlich wird dabei vorausgesetzt, dass τ gegen die Periode der Eigenschwingungen der Electrometernadel sehr klein ist.

III. Ein in der soeben erwähnten Weise oscillirendes Potential liefert bei meinen Versuchen ein Inductorium, dessen secundäre Rolle die Länge = 31 [cm] und den Durchmesser = 11 [cm], bei dem Widerstande = 411 Siem. E., hat. Der primäre Strom ist von einem Grove-Elemente geliefert; der Widerstand der primären Kette kann mittelst eines eingeschalteten Rheostaten variirt werden; diese Variationen finden in den Grenzen von etwa 10 bis etwa 30 [Ohm] statt.

Als Unterbrecher wurde im Anfange der Arbeit das eine Rad eines Buff'schen Disjunctors (Durchmesser = 5,15 [cm]) mit einer auf ihm federnd schleifenden Bürste aus feinen Kupferdrähten benutzt. Es ist derselbe Unterbrecher, welcher Herrn Dr. Franke bei seiner Untersuchung über die Abhängigkeit der D.C.-en flüssiger Körper von der Temperatur diente (Franke, Inauguraldissertation, Bunzlau 1893; auch: Wied. Ann., Bd. 50, 1893, S. 163). Dieser Unterbrecher

(ich will ihn „Unterbrecher No. I“ nennen) liefert 8 Unterbrechungen bei einer Umdrehung des Rades; wenn also das Rad n Umdrehungen in einer Secunde macht, so ist die volle Periode der Oscillationen von v auf dem isolirtem Pole des Inductoriums gleich

$$\tau = \frac{1}{8n} \text{ [sec]};$$

die Ladungszeit aber eines mit diesem Pole verbundenen Condensators beträgt

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{16 \cdot n} \text{ [sec]}. \qquad (\omega)$$

Die Berechnung der Ladungsdauer nach der Formel (ω) setzt voraus, dass die Bürste stets dicht am Rade liegt. Das kann aber natürlich durchaus nicht bei einer beliebigen Rotationsgeschwindigkeit des Rades der Fall sein: bei grossen Geschwindigkeiten findet ganz sicher das Ueberspringen der Bürste statt, und dann wird die Formel (ω) nicht mehr richtig; das kann zweifellos aus Messungen der D. Ç.-en von gut leitenden Flüssigkeiten geschlossen werden, wie es weiter unten ausführlich besprochen wird. Und zwar ist es selbstverständlich, dass beim Ueberspringen der Bürste die Formel (ω) nur zu kleine Werthe für die Ladungsdauer geben kann.

Es kann also nur bis auf eine gewisse Grenze vortheilhaft sein, die Rotationsgeschwindigkeit eines derartigen Unterbrechers zu vergrössern; nach dem Ueberschreiten dieser Grenze kann, wegen der Eigenschwingungen der Bürste, sogar die Zunahme der Ladungsdauer bei Vergrösserung der Geschwindigkeit eintreten.

Nachdem solches Verhalten des Unterbrechers No. I aus den Versuchsergebnissen festgestellt war, wurde ein neuer Unterbrecher construirt, welchen ich „Unterbrecher No. II“ nennen werde. Der Unterbrecher No. II liefert 120 Unter-

brechungen bei einer Umdrehung; bei n Umdrehungen in der Secunde kann also die Ladungsdauer auf

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{240 \cdot n} \text{ [sec]} \qquad (\Omega)$$

herabgesetzt werden, wenn nur n eine gewisse obere Grenze nicht überschreitet.

Bei einer mässigen Rotationsgeschwindigkeit, die in den Grenzen

$$\text{von } n = 10 \text{ bis } n = 16$$

liegt, giebt der Unterbrecher No. II sehr gute Resultate.

Der Unterbrecher No. II hat folgende Dimensionen: Durchmesser des Rades = 13,8 [cm]; seine Breite an der Peripherie = 1,49 [cm]; Länge je eines metallischen resp. isolirenden Streifchens (die nämlich Schliessungen resp. Unterbrechungen des primären Stromes besorgen) = 0,2 [cm] (das ist die Dimension eines Streifchens in der Richtung der Peripherie des Rades); Breite dieser Streifchen (d. h. die der Rotationsaxe des Rades parallele Dimension) ist gleich der Breite des Rades an seiner Peripherie. Wegen kleiner Länge der Streifchen konnte natürlich eine aus feinen Drähten bestehende Bürste nicht mehr benutzt werden; statt dieser wurde ein dünnes 1 [cm] breites Kupferstreifchen angebracht, welches am Ende fein abgeschliffen und mit 7 Zähnen versehen ist; das Streifchen ist von einer Stahlfeder getragen, und sein abgeschliffenes Ende trifft die Peripherie des Rades unter dem Winkel von etwa 45°.

Die Räder der beiden benutzten Unterbrecher wurden durch eine Hefner-Alteneck'sche Maschine getrieben; die Maschine von 2 bis 5 grossen Accumulatoren gespeist; kleinere Aenderungen der Rotationsgeschwindigkeit wurden durch Aenderungen in einem eingeschalteten Widerstande erzielt.

Die Rotationsgeschwindigkeit der Unterbrecherräder wird mittelst eines Tourenzählers und einer Secundenuhr bestimmt.

Da es meine Absicht war, die Versuche bei einer Reihe von ziemlich verschiedenen Ladungszeiten anzustellen, war es für mich von Wichtigkeit, auch sehr langsame elektrische Schwingungen zur Verfügung zu haben. Die beiden Unterbrecher konnten mich aber in dieser Hinsicht nicht befriedigen: bei sehr kleinen Rotationsgeschwindigkeiten functioniren sie gar nicht regelmässig (wegen der unter diesen Umständen zu geringen Trägheit der Räder). Dann habe ich, nach dem Rathe des Herrn Dr. Fomm, eine kleine Hauptschlussmaschine (bezogen von der Anstalt der Allgemeinen Elektricitäts-Gesellschaft zu Berlin, No. 2839) zur Erzeugung des oscillirenden primären Stromes benutzt, indem dieselbe in eine Wechselstrommaschine dadurch verwandelt worden ist, dass von zwei gegenüberliegenden Collectorstreifchen durch Bürsten stetig der Strom abgenommen wurde. Die Resultate erwiesen sich als sehr gut: wenn die Maschine von 30 Akkumulatoren gespeist ist, macht der Gramm'sche Ring von 4,5 bis 7 Umdrehungen in einer Secunde; der von der Maschine für das Inductorium gelieferte primäre Strom bietet von 9 bis 14 Wechsel der Richtung in einer Sekunde, und die vom secundären Strome bedingte Ladungsdauer des Condensators beträgt

$$\text{von } \tfrac{1}{14} \text{ bis } \tfrac{1}{9} \text{ [sec].}$$

Dabei sind aber die Schwingungen der die Energie des secundären Stromes messenden Electrometernadel merkwürdig regelmässig, und die Berechnung einer Gleichgewichtslage aus Umkehrpunkten gibt eine auffallende Genauigkeit: öfters kommt es vor, dass die vier aus fünf Umkehrpunkten berechneten Gleichgewichtslagen bis auf ein Zehntel eines Scalentheiles übereinstimmen, und zwar bei grossen Schwingungsamplituden. Indessen, wie aus den weiter unten mitgetheilten Zahlen ersichtlich ist, bekommt man unter Anwendung der Wechselstrommaschine

für die D.C.-en von gut iolirenden Flüssigkeiten sehr nahe richtige Werthe. Ich kann also die Anwendung dieser Maschine als ein sehr elegantes Mittel zur Untersuchung der dielectrischen Polarisation in gut isolirenden Substanzen empfehlen.

Beinahe eben so regelmässig sind die Schwingungen der Electrometernadel bei Anwendung des Unterbrechers No. II, wenn nur die Rotationsgeschwindigkeit innerhalb der oben mitgetheilten Grenzen liegt.

Was den Unterbrecher No. I betrifft, so functionirte er überhaupt bei Weitem nicht so regelmässig wie der Unterbrecher No. II. Dieser Umstand ist selbstverständlich dem kleineren Schwunge seines Rades zuzuschreiben. Der Unterbrecher No. I wurde von mir nur im Anfange der Arbeit benutzt, später aber ganz verlassen.

IV. Zur Herstellung von verschiedenen Verbindungen zwischen dem Doppelcondensator, dem Electrometer und dem Inductorium dient mir ein Commutator aus Paraffin. Derselbe gestattet:

1) die obere und mittlere Platte des Doppelcondensators zur Erde abzuleiten (die untere Platte, wie schon erwähnt, bleibt stets mit der Erde verbunden);

2) die obere Platte mit dem isolirten Pole des Inductoriums (der andere Pol stets zur Erde abgeleitet) und gleichzeitig die mittlere Platte mit dem Electrometer in Verbindung zu setzen;

3) das Electrometer allein mit dem erwähnten freien Pole des Inductoriums zu verbinden;

4) das Electrometer mit der oberen Platte und mit dem Inductorium zu verbinden, indem die mittlere Platte isolirt bleibt (NB.: die Anordnung für diese letzte Combination wurde nur bei den Vorversuchen benutzt; da sie

sich als nicht nöthig erwiesen hat, wurde sie später beseitigt).

Alle Verbindungen sind mittelst sehr dünner Messingdrähte hergestellt; zur Unterstützung derselben sind paraffinirte Glasstäbchen und Seidenfäden benutzt.

B. Messungsverfahren.

Nennen wir die obere Zwischenschicht des Doppelcondensators — „Schicht No. 1", die untere — „Schicht No. 2".

Nehmen wir weiter die Capacität des aus der oberen und mittleren Kupferplatte bestehenden Condensators, wenn die Luft die betreffende Zwischenschicht füllt, als Einheit der Capacitäten an, dann ist die Capacität des von der mittleren und unteren Platte gebildeten Luftcondensators auch (sehr nahe: s. oben) gleich Eins. Wenn aber die Schichten No. 1 und 2 mit Flüssigkeiten von D. C.-en δ_1 resp. δ_2 erfüllt sind, so sind die Capacitäten der beiden Condensatoren gleich δ_1 resp. δ_2.

Es sei noch γ die als constant vermuthete Capacität des Electrometers in Doppelschaltung + Capacität des Paraffincommutators + Capacität gesammter Zuleitungsdrähte.

Es seien jetzt die beiden Zwischenschichten mit Flüssigkeiten (δ_1 und δ_2) gefüllt; alle Platten und Electrometer seien zunächst mit der Erde verbunden, dann aber Electrometer und mittlere Platte isolirt und miteinander verbunden, während die obere Platte bis auf das Potential $= V$ geladen wird. Dann bekommt die mittlere Platte ein kleineres Potential $= v$, welches am Electrometer gemessen wird. Wenn wir nun annehmen, dass die beiden Flüssigkeiten und alle benutzten isolirenden Stützen vollkommene Isolatoren seien, so muss offenbar die Gleichung

$$\delta_1 (V - v) = \delta_2 v + \gamma v,$$

oder

$$(V : v) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1 \tag{3}$$

bestehen.

Natürlich kann unsere Voraussetzung in Wirklichkeit nie in ganzer Strenge erfüllt werden. Man vermuthet jedoch, dass diesem ideellen Falle um so mehr genähert wird, je kleiner die Ladungsdauer ausfällt. Darauf beruht die Anwendung von Wechselströmen zur Bestimmung der D. C.-en; die Vermuthung wird von der Erfahrung bestätigt.

Es sei die obere Platte mit dem freien Pole eines Inductoriums, in welchem elektrische Schwingungen vor sich gehen, verbunden; die mittlere Platte aber isolirt und mit einem Electrometer in Doppelschaltung verbunden.

Das Potential der oberen Platte V ist dann eine periodische Function der Zeit t mit der Periode $= \tau$; das Potential der mittleren Platte v ist ebenfalls eine periodische Function von t und zwar mit derselben Periode.

Wenn wir nun

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau V^2 dt = W^2$$

und

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v^2 dt = w^2$$

setzen, so wird anstatt der Gleichung (3) die folgende bestehen:

$$(W : w) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1. \tag{4}$$

Auf unvollkommene Isolatoren angewandt gilt die Gleichung (4) nur angenähert; der oben ausgesprochenen Vermuthung gemäss ist aber die Annäherung um so grösser, je kleiner τ gemacht wird.

Die Grösse w ist nun unmittelbar von dem mit der mittleren Platte verbundenen Electrometer gegeben; und zwar kann sie nach der Gleichung (2) (Abschnitt A, Artikel II) aus dem Werthe des Ausschlages α berechnet werden.

Wie aber kann die Bestimmung von W geschehen?

Das geschieht ganz einfach im Falle, wo die zwei folgenden Voraussetzungen berechtigt sind: 1) dass die „electrostatische Capacität" der secundären Rolle des Inductoriums sehr gross gegen die von uns angenommene Capacitätseinheit erscheint; 2) dass die elektrischen Schwingungen im Inductorium ganz regelmässig vor sich gehen und keine merkliche Aenderung während der zu den weiter beschriebenen Manipulationen nöthigen Zeit erfahren.

Nehmen wir für einen Augenblick an, dass die beiden Voraussetzungen erfüllt seien; dann verfahren wir folgendermassen:

Nachdem der Ausschlag α bestimmt ist, trennen wir sowohl das Electrometer als auch das Inductorium von unserem Doppelcondensator ab und verbinden sie miteinander. Dann entspricht offenbar der neue Ausschlag der Nadel (nennen wir ihn A) dem Potentiale W, d. h. es besteht dann die Gleichung

$$A = a \cdot W^2.$$

In diesem Falle ist also

$$W : w = \sqrt{A} : \sqrt{\alpha},$$

und die Gleichung (4) wird zu

$$(\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1. \tag{5}$$

Wenn aber die erste von den oben erwähnten Voraussetzungen nicht berechtigt ist, so kann die „electrostatische Capacität" des Inductoriums experimentell bestimmt, und ihr Werth in der von uns angenommenen Einheit angegeben werden. Dann kann man, jedoch unter der An-

nahme, dass die zweite von jenen Voraussetzungen doch richtig ist, das oben beschriebene Verfahren noch anwenden; nur die Formeln werden in diesem Falle ein wenig complicirter, indem die „electrostatische Capacität" des Inductoriums in die Gleichungen eintritt. Diese complicirteren Formeln theile ich nicht mit, weil bei meinen Versuchen die erste Voraussetzung so nahe erfüllt war, dass die „electrostatische Capacität" des Inductoriums wegen ihrer Grösse gegen die oben angenommene Capacitätseinheit nicht geschätzt werden konnte. Beim Anfange der Arbeit habe ich mehrmals versucht diese Capacität zu bestimmen, indem ich folgendermassen verfuhr: ich bestimmte den Ausschlag des Electrometers bei der im Abschnitte A, Artikel IV, unter 3) bezeichneten Verbindung; dann wurde auf die unter 4) bezeichnete Verbindung commutirt und der Ausschlag von neuem bestimmt; dabei hat sich aber bei einer ziemlich grossen Anzahl derartiger Versuche kein Unterschied zwischen den Grössen der beiden Ausschläge ergeben. Deshalb betrachte ich es als berechtigt das oben mitgetheilte vereinfachte Verfahren anzuwenden und zur Berechnung der Versuchsergebnisse die Formel (5) zu benutzen. Was aber die zweite von den oben erwähnten Voraussetzungen betrifft, so konnte sie bei meinen Versuchen nur ausnahmsweise, in durchaus seltenen Fällen, nicht erfüllt sein. Die Bürgschaft dafür ist erstens die grosse Regelmässigkeit des Functionirens der Wechselstrommaschine und der beiden Unterbrecher (bei passenden Rotationsgeschwindigkeiten), welche Regelmässigkeit aus dem Verhalten der Ausschläge der Electrometernadel wohl erkennbar ist; zweitens aber auch gute Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen einzelner Beobachtungen. Und zwar ist die Regelmässigkeit am grössten bei der Wechselstrommaschine, dann beim Unterbrecher No. II; dem Unterbrecher No. I kommt in dieser Hinsicht die letzte Stelle zu.

Mein Verfahren besteht also im Folgenden:

I. Ich beginne mit der im Abschnitt A, Artikel IV unter 1) bezeichneten Verbindung, um die Möglichkeit zufälliger Elektrisirung der Platten beim Anfange des Versuches auszuschliessen;

II. dann commutire ich auf die Verbindung, welche unter 2) angedeutet ist, und bestimme den Ausschlag α;

III. schliesslich commutire ich auf die unter 3) bezeichnete Verbindung und bestimme den Ausschlag A.

Um die ganze Manipulation möglichst kurz zu machen, was von grosser Wichtigkeit ist, werden die Gleichgewichtslagen aus Schwingungen bestimmt, nämlich aus 3 oder 5 Umkehrpunkten; für die Verkürzung der Dauer des Verfahrens ist der Umstand sehr günstig, dass die Schwingungen der Nadel meines Electrometers sehr rasch sind (s. oben). Das Abwarten des Eintretens der thatsächlichen Ruhe der Nadel raubt sehr viel Zeit, da die Luftdämpfung nur gering ist (s. oben), und kann deshalb gar nicht empfohlen werden. Zur Erleichterung der Berechnung von Gleichgewichtslagen aus Umkehrpunkten habe ich eine Hilfstabelle construirt.

Die Berechnung von Versuchsergebnissen geschieht nach der Formel (5). Dass diese Berechnung, wenn sie sich auf leitende Flüssigkeiten und dabei auf langsame elektrische Schwingungen bezieht, nur ganz illusorische Werthe für die D.C.-en geben kann, das liegt auf der Hand. Aber ich habe mir, wie oben schon erwähnt ist, die Aufgabe gestellt, zu prüfen, ob nicht diese Werthe, bei Abnahme der Ladungsdauer $\frac{\tau}{2}$, sich asymptotisch einer festen unteren Grenze nähern.

Kehren wir zur Gleichung (5) zurück. Wenn die beiden Zwischenschichten des Doppelcondensators mit Luft erfüllt sind, kommt dieser Gleichung folgende Gestalt zu:

$$\sqrt{A} : \sqrt{\alpha} = 2 + \gamma. \qquad (6)$$

Wie aus (6) erhellt, geben die Versuche mit der Luft in den beiden Zwischenschichten unmittelbar den Werth der Constanten γ.

Wenn nun die Schicht No. 1 mit einer Flüssigkeit (von der D.C. $= \delta_1$) erfüllt ist, die Schicht No. 2 dagegen mit Luft, so verwandelt sich die Gleichung (5) in

$$(\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}) - 1 = (1 + \gamma) : \delta_1. \qquad (7)$$

Derartige Versuche können also zur Bestimmung der D.C. einer Flüssigkeit in Bezug auf Luft dienen, wenn der Werth von γ aus Vorversuchen bekannt ist.

Endlich können Versuche mit zwei Flüssigkeiten [Gleichung (5)] als Controlversuche dienen.

C. Ergebnisse.

Wegen grosser Wichtigkeit einer möglichst genauen Kenntniss des Werthes von γ wurde zur Ermittelung desselben eine ziemlich grosse Anzahl Versuche angestellt.

Resultate:

aus Versuchen mit

Unterbrecher No. II	Unterbrecher No. I
$\gamma = 0{,}63$ (Mittel aus 117 Vers.)	$\gamma = 0{,}65$ (aus 30 Vers.)

Wechselstrommaschine

$\gamma = 0{,}66$ (Mittel aus 98 Versuchen).

Dabei wurden fast immer die mässigen Rotationsgeschwindigkeiten der beiden Unterbrecher benutzt (welche Geschwindigkeiten, wie schon erwähnt, dem regelmässigsten Functioniren der Unterbrecher entsprechen). Trotz grosser Anzahl von Beobachtungen konnte eine Abhängigkeit der Grösse γ von der Höhe der benutzten Potentiale (von der Grösse A) nicht nachgewiesen werden. Auf eine solche Abhängigkeit deutet Herr Arons bei dem von ihm benutzten Mascart'schen Electrometer hin (Wied. Ann. Bd. 35, 1888, SS. 294—295). Uebrigens variirten bei

meinen Versuchen die Potentiale innerhalb nicht so weiter Grenzen, wie es bei Herrn Arons der Fall war.

Was die Verschiedenheit der Werthe von γ bei verschiedenen Ladungsdauern betrifft (s. die oben angeführten Zahlen), so zeigen sie eine derartige Gesetzmässigkeit (je kleiner die Ladungsdauer ist, desto kleiner fällt auch γ aus), die wohl erklärbar zu sein scheint: es muss zu der wahren Capacität des Electrometers und der Zuleitungen (d. h. derjenigen Capacität, welche einer vollkommenen Isolation entsprechen würde) noch eine scheinbare hinzukommen, welche von der oberflächlichen Leitung der Seidenfäden und Unterstützungsstäbchen herrührt; es ist aber sehr wohl denkbar, dass die von Isolationsmangel herrührenden Electricitätsverluste (also auch die scheinbare Capacität) desto grösser sind, je länger die Ladungsdauer ausfällt; bei den ziemlich grossen Unterschieden in der Ladungsdauer, wie es bei den drei erwähnten Versuchsreihen der Fall war, können vielleicht diese Unterschiede einen wahrnehmbaren Einfluss auf das Resultat ausüben.

Jedenfalls kann die Verschiedenheit der Werthe von γ bei verschiedener Ladungsdauer nur einen kleinen Einfluss auf die Werthe der D.C.-en haben, nämlich: bei Berechnung dieser Werthe wird nicht γ selbst, sondern $1 + \gamma$ benutzt [s. Gleichung (7)]. Es kann also dieser Einfluss höchstens durch

$$1,8\,\%$$

der Grösse einer zu bestimmenden D.C. dargestellt werden.

Doch halte ich es für nothwendig, bei der Berechnung einer D.C. immer denjenigen von den oben mitgetheilten Werthen von γ zu benutzen, welcher zur zugehörigen Unterbrechungsart gehört.

Jetzt theile ich die bei den Versuchen mit verschiedenen Flüssigkeiten bekommenen Resultate mit. Die Versuche beziehen sich auf gewöhnliche Zimmertemperatur, die etwa

zwischen 17° und 20° schwankte. Bei zähen Flüssigkeiten wurde der Durchfluss durch die dünnen Trichterröhren (bei Füllung von Zwischenschichten des Doppelcondensators) durch Ausübung eines Luftdruckes beschleunigt.

Die weiter unten mitgetheilten Werthe der Ladungsdauer $\frac{\tau}{2}$ wurden nach den Formeln (ω) und (Ω) (Abschnitt A, Art. III) berechnet; aus dem oben erörterten Grunde wird diesen Werthen keine absolute Genauigkeit zugeschrieben: es handelt sich nur um eine ungefähre Schätzung der Ladungsdauer.

A. Schlecht leitende Flüssigkeiten.

I. Benzol.

Dicht. = 0,879 bei 19° C.

Unterbrecher No. II

$$\delta = 2{,}11 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2600}\right)$$

Unterbrecher No. I

$$\delta = 2{,}17 \left(\frac{\tau}{2} \text{ von } \frac{1}{160} \text{ bis } \frac{1}{320}\right)$$

Wechselstrommaschine

$$\delta = 2{,}18 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{12}\right).$$

Man sieht, dass die Wechselstrommaschine einen bis auf 3,3 % richtigen Werth geliefert hat.

Die von anderen Forschern gefundenen Werthe sind: 2,198 (Silow); 2,43 (Winkelmann); 2,13 (bei 20° C.) (Negreano); 1,948 (Donle); 1,766 (Ladungsdauer = 1 Secunde) (G. Weber); 2,207 (Ladungsdauer $= \frac{1}{8{,}33}$ [Sec.]) (G. Weber); 2,17 (Tsheglájew).

sehr stark, und man konnte sehr wohl das Eintreten der thatsächlichen Ruhe derselben abwarten. Die Nullpunktsverschiebungen in den Oelen waren sehr klein im Verhältnisse zu den benutzten Ausschlägen: sie machten kaum 1/2 % derselben aus. Dieser Umstand ist der bedeutenden Schwere der von Herrn Franke und mir für das Edelmann'sche Electrometer benutzten „Nadel" zuzuschreiben. Die davon herrührende kleine Empfindlichkeit des Edelmann'schen Electrometers stellte aber für mich keinen Uebelstand dar, weil, wie oben erwähnt, das Mascart'sche Electrometer auch eine kleine Empfindlichkeit besass, während die vom Inductorium gelieferten Potentiale genügend hoch waren.

Das von den Herren Cohn und Arons durch $F_0 : M_0$ bezeichnete Verhältniss (l. c., S. 16) erwies sich für meine Electrometer im Mittel gleich 2,80.

Ich konnte die Kraftmessungsmethode nur für diejenigen Oele anwenden, von denen mir hinreichend grosse Mengen (zur Füllung des Flüssigkeitselectrometers) zur Verfügung standen.

Im Weiteren behalte ich das Zeichen δ zur Bezeichnung der nach der Kraftmessungsmethode bekommenen Werthe von D.C.-en bei; die nach der Capacitätsmethode bekommenen Werthe (welche, bei kleiner Ladungsdauer, natürlich, illusorisch sind) werden durch D bezeichnet.

I. Oleum Juniperi e baccis No. IV.

Dicht. = 0,8657 bei 19,5° C.

Unterbrecher No. II:		Wechselstrommaschine:
$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{3860}$	$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{1900}$	$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{12}$
$D = 2,19.$	$D = 2,45.$	$D = 2,54.$

nahme, dass die zweite von jenen Voraussetzungen doch richtig ist, das oben beschriebene Verfahren noch anwenden; nur die Formeln werden in diesem Falle ein wenig complicirter, indem die „electrostatische Capacität“ des Inductoriums in die Gleichungen eintritt. Diese complicirteren Formeln theile ich nicht mit, weil bei meinen Versuchen die erste Voraussetzung so nahe erfüllt war, dass die „electrostatische Capacität“ des Inductoriums wegen ihrer Grösse gegen die oben angenommene Capacitätseinheit nicht geschätzt werden konnte. Beim Anfange der Arbeit habe ich mehrmals versucht diese Capacität zu bestimmen, indem ich folgendermassen verfuhr: ich bestimmte den Ausschlag des Electrometers bei der im Abschnitte A, Artikel IV, unter 3) bezeichneten Verbindung; dann wurde auf die unter 4) bezeichnete Verbindung commutirt und der Ausschlag von neuem bestimmt; dabei hat sich aber bei einer ziemlich grossen Anzahl derartiger Versuche kein Unterschied zwischen den Grössen der beiden Ausschläge ergeben. Deshalb betrachte ich es als berechtigt das oben mitgetheilte vereinfachte Verfahren anzuwenden und zur Berechnung der Versuchsergebnisse die Formel (5) zu benutzen. Was aber die zweite von den oben erwähnten Voraussetzungen betrifft, so konnte sie bei meinen Versuchen nur ausnahmsweise, in durchaus seltenen Fällen, nicht erfüllt sein. Die Bürgschaft dafür ist erstens die grosse Regelmässigkeit des Functionirens der Wechselstrommaschine und der beiden Unterbrecher (bei passenden Rotationsgeschwindigkeiten), welche Regelmässigkeit aus dem Verhalten der Ausschläge der Electrometernadel wohl erkennbar ist; zweitens aber auch gute Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen einzelner Beobachtungen. Und zwar ist die Regelmässigkeit am grössten bei der Wechselstrommaschine, dann beim Unterbrecher No. II; dem Unterbrecher No. I kommt in dieser Hinsicht die letzte Stelle zu.

Mein Verfahren besteht also im Folgenden:

I. Ich beginne mit der im Abschnitt A, Artikel IV unter 1) bezeichneten Verbindung, um die Möglichkeit zufälliger Elektrisirung der Platten beim Anfange des Versuches auszuschliessen;

II. dann commutire ich auf die Verbindung, welche unter 2) angedeutet ist, und bestimme den Ausschlag α;

III. schliesslich commutire ich auf die unter 3) bezeichnete Verbindung und bestimme den Ausschlag A.

Um die ganze Manipulation möglichst kurz zu machen, was von grosser Wichtigkeit ist, werden die Gleichgewichtslagen aus Schwingungen bestimmt, nämlich aus 3 oder 5 Umkehrpunkten; für die Verkürzung der Dauer des Verfahrens ist der Umstand sehr günstig, dass die Schwingungen der Nadel meines Electrometers sehr rasch sind (s. oben). Das Abwarten des Eintretens der thatsächlichen Ruhe der Nadel raubt sehr viel Zeit, da die Luftdämpfung nur gering ist (s. oben), und kann deshalb gar nicht empfohlen werden. Zur Erleichterung der Berechnung von Gleichgewichtslagen aus Umkehrpunkten habe ich eine Hilfstabelle construirt.

Die Berechnung von Versuchsergebnissen geschieht nach der Formel (5). Dass diese Berechnung, wenn sie sich auf leitende Flüssigkeiten und dabei auf langsame elektrische Schwingungen bezieht, nur ganz illusorische Werthe für die D.C.-en geben kann, das liegt auf der Hand. Aber ich habe mir, wie oben schon erwähnt ist, die Aufgabe gestellt, zu prüfen, ob nicht diese Werthe, bei Abnahme der Ladungsdauer $\frac{\tau}{2}$, sich asymptotisch einer festen unteren Grenze nähern.

Kehren wir zur Gleichung (5) zurück. Wenn die beiden Zwischenschichten des Doppelcondensators mit Luft erfüllt sind, kommt dieser Gleichung folgende Gestalt zu:

$$\sqrt{A} : \sqrt{\alpha} = 2 + \gamma. \qquad (6)$$

nahme, dass die zweite von jenen Voraussetzungen doch richtig ist, das oben beschriebene Verfahren noch anwenden; nur die Formeln werden in diesem Falle ein wenig complicirter, indem die „electrostatische Capacität" des Inductoriums in die Gleichungen eintritt. Diese complicirteren Formeln theile ich nicht mit, weil bei meinen Versuchen die erste Voraussetzung so nahe erfüllt war, dass die „electrostatische Capacität" des Inductoriums wegen ihrer Grösse gegen die oben angenommene Capacitätseinheit nicht geschätzt werden konnte. Beim Anfange der Arbeit habe ich mehrmals versucht diese Capacität zu bestimmen, indem ich folgendermassen verfuhr: ich bestimmte den Ausschlag des Electrometers bei der im Abschnitte A, Artikel IV, unter 3) bezeichneten Verbindung; dann wurde auf die unter 4) bezeichnete Verbindung commutirt und der Ausschlag von neuem bestimmt; dabei hat sich aber bei einer ziemlich grossen Anzahl derartiger Versuche kein Unterschied zwischen den Grössen der beiden Ausschläge ergeben. Deshalb betrachte ich es als berechtigt das oben mitgetheilte vereinfachte Verfahren anzuwenden und zur Berechnung der Versuchsergebnisse die Formel (5) zu benutzen. Was aber die zweite von den oben erwähnten Voraussetzungen betrifft, so konnte sie bei meinen Versuchen nur ausnahmsweise, in durchaus seltenen Fällen, nicht erfüllt sein. Die Bürgschaft dafür ist erstens die grosse Regelmässigkeit des Functionirens der Wechselstrommaschine und der beiden Unterbrecher (bei passenden Rotationsgeschwindigkeiten), welche Regelmässigkeit aus dem Verhalten der Ausschläge der Electrometernadel wohl erkennbar ist; zweitens aber auch gute Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen einzelner Beobachtungen. Und zwar ist die Regelmässigkeit am grössten bei der Wechselstrommaschine, dann beim Unterbrecher No. II; dem Unterbrecher No. I kommt in dieser Hinsicht die letzte Stelle zu.

Mein Verfahren besteht also im Folgenden:

I. Ich beginne mit der im Abschnitt A, Artikel IV unter 1) bezeichneten Verbindung, um die Möglichkeit zufälliger Elektrisirung der Platten beim Anfange des Versuches auszuschliessen;

II. dann commutire ich auf die Verbindung, welche unter 2) angedeutet ist, und bestimme den Ausschlag α;

III. schliesslich commutire ich auf die unter 3) bezeichnete Verbindung und bestimme den Ausschlag A.

Um die ganze Manipulation möglichst kurz zu machen, was von grosser Wichtigkeit ist, werden die Gleichgewichtslagen aus Schwingungen bestimmt, nämlich aus 3 oder 5 Umkehrpunkten; für die Verkürzung der Dauer des Verfahrens ist der Umstand sehr günstig, dass die Schwingungen der Nadel meines Electrometers sehr rasch sind (s. oben). Das Abwarten des Eintretens der thatsächlichen Ruhe der Nadel raubt sehr viel Zeit, da die Luftdämpfung nur gering ist (s. oben), und kann deshalb gar nicht empfohlen werden. Zur Erleichterung der Berechnung von Gleichgewichtslagen aus Umkehrpunkten habe ich eine Hilfstabelle construirt.

Die Berechnung von Versuchsergebnissen geschieht nach der Formel (5). Dass diese Berechnung, wenn sie sich auf leitende Flüssigkeiten und dabei auf langsame elektrische Schwingungen bezieht, nur ganz illusorische Werthe für die D.C.-en geben kann, das liegt auf der Hand. Aber ich habe mir, wie oben schon erwähnt ist, die Aufgabe gestellt, zu prüfen, ob nicht diese Werthe, bei Abnahme der Ladungsdauer $\frac{\tau}{2}$, sich asymptotisch einer festen unteren Grenze nähern.

Kehren wir zur Gleichung (5) zurück. Wenn die beiden Zwischenschichten des Doppelcondensators mit Luft erfüllt sind, kommt dieser Gleichung folgende Gestalt zu:

$$\sqrt{A} : \sqrt{\alpha} = 2 + \gamma. \tag{6}$$

Wenn wir das Elektrometer in Doppelschaltung mit dem erwähnten isolirten Pole verbinden, so muss der Ausschlag, wie es ganz einfache Betrachtungen zeigen, gleich sein

$$\alpha = a \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v^2 \, dt.$$

Das heisst: bei Anwendung der Doppelschaltung zur Energiemessung von Wechselströmen ist der Ausschlag von der Constanten b unabhängig (c aber ist einfach vernachlässigt worden). Für diesen Fall gilt also anstatt (1) eine einfachere Formel

$$\alpha = a w^2, \tag{2}$$

wo w^2 — das mittlere Quadrat des oscillirenden Potentials v bedeutet. Natürlich wird dabei vorausgesetzt, dass τ gegen die Periode der Eigenschwingungen der Electrometernadel sehr klein ist.

III. Ein in der soeben erwähnten Weise oscillirendes Potential liefert bei meinen Versuchen ein Inductorium, dessen secundäre Rolle die Länge = 31 [cm] und den Durchmesser = 11 [cm], bei dem Widerstande = 411 Siem. E., hat. Der primäre Strom ist von einem Grove-Elemente geliefert; der Widerstand der primären Kette kann mittelst eines eingeschalteten Rheostaten variirt werden; diese Variationen finden in den Grenzen von etwa 10 bis etwa 30 [Ohm] statt.

Als Unterbrecher wurde im Anfange der Arbeit das eine Rad eines Buff'schen Disjunctors (Durchmesser = 5,15 [cm]) mit einer auf ihm federnd schleifenden Bürste aus feinen Kupferdrähten benutzt. Es ist derselbe Unterbrecher, welcher Herrn Dr. Franke bei seiner Untersuchung über die Abhängigkeit der D.C.-en flüssiger Körper von der Temperatur diente (Franke, Inauguraldissertation, Bunzlau 1893; auch: Wied. Ann., Bd. 50, 1893, S. 163). Dieser Unterbrecher

(ich will ihn „Unterbrecher No. I“ nennen) liefert 8 Unterbrechungen bei einer Umdrehung des Rades; wenn also das Rad n Umdrehungen in einer Secunde macht, so ist die volle Periode der Oscillationen von v auf dem isolirtem Pole des Inductoriums gleich

$$\tau = \frac{1}{8n} \text{ [sec]};$$

die Ladungszeit aber eines mit diesem Pole verbundenen Condensators beträgt

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{16 \cdot n} \text{ [sec]}. \qquad (\omega)$$

Die Berechnung der Ladungsdauer nach der Formel (ω) setzt voraus, dass die Bürste stets dicht am Rade liegt. Das kann aber natürlich durchaus nicht bei einer beliebigen Rotationsgeschwindigkeit des Rades der Fall sein: bei grossen Geschwindigkeiten findet ganz sicher das Ueberspringen der Bürste statt, und dann wird die Formel (ω) nicht mehr richtig; das kann zweifellos aus Messungen der D. C.-en von gut leitenden Flüssigkeiten geschlossen werden, wie es weiter unten ausführlich besprochen wird. Und zwar ist es selbstverständlich, dass beim Ueberspringen der Bürste die Formel (ω) nur zu kleine Werthe für die Ladungsdauer geben kann.

Es kann also nur bis auf eine gewisse Grenze vortheilhaft sein, die Rotationsgeschwindigkeit eines derartigen Unterbrechers zu vergrössern; nach dem Ueberschreiten dieser Grenze kann, wegen der Eigenschwingungen der Bürste, sogar die Zunahme der Ladungsdauer bei Vergrösserung der Geschwindigkeit eintreten.

Nachdem solches Verhalten des Unterbrechers No. I aus den Versuchsergebnissen festgestellt war, wurde ein neuer Unterbrecher construirt, welchen ich „Unterbrecher No. II“ nennen werde. Der Unterbrecher No. II liefert 120 Unter-

brechungen bei einer Umdrehung; bei n Umdrehungen in der Secunde kann also die Ladungsdauer auf

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{240 \cdot n} \text{ [sec]} \qquad (\Omega)$$

herabgesetzt werden, wenn nur n eine gewisse obere Grenze nicht überschreitet.

Bei einer mässigen Rotationsgeschwindigkeit, die in den Grenzen

$$\text{von } n = 10 \text{ bis } n = 16$$

liegt, giebt der Unterbrecher No. II sehr gute Resultate.

Der Unterbrecher No. II hat folgende Dimensionen: Durchmesser des Rades = 13,8 [cm]; seine Breite an der Peripherie = 1,49 [cm]; Länge je eines metallischen resp. isolirenden Streifchens (die nämlich Schliessungen resp. Unterbrechungen des primären Stromes besorgen) = 0,2 [cm] (das ist die Dimension eines Streifchens in der Richtung der Peripherie des Rades); Breite dieser Streifchen (d. h. die der Rotationsaxe des Rades parallele Dimension) ist gleich der Breite des Rades an seiner Peripherie. Wegen kleiner Länge der Streifchen konnte natürlich eine aus feinen Drähten bestehende Bürste nicht mehr benutzt werden; statt dieser wurde ein dünnes 1 [cm] breites Kupferstreifchen angebracht, welches am Ende fein abgeschliffen und mit 7 Zähnen versehen ist; das Streifchen ist von einer Stahlfeder getragen, und sein abgeschliffenes Ende trifft die Peripherie des Rades unter dem Winkel von etwa 45°.

Die Räder der beiden benutzten Unterbrecher wurden durch eine Hefner-Alteneck'sche Maschine getrieben; die Maschine von 2 bis 5 grossen Accumulatoren gespeist; kleinere Aenderungen der Rotationsgeschwindigkeit wurden durch Aenderungen in einem eingeschalteten Widerstande erzielt.

Die Rotationsgeschwindigkeit der Unterbrecherräder wird mittelst eines Tourenzählers und einer Secundenuhr bestimmt.

Da es meine Absicht war, die Versuche bei einer Reihe von ziemlich verschiedenen Ladungszeiten anzustellen, war es für mich von Wichtigkeit, auch sehr langsame elektrische Schwingungen zur Verfügung zu haben. Die beiden Unterbrecher konnten mich aber in dieser Hinsicht nicht befriedigen: bei sehr kleinen Rotationsgeschwindigkeiten functioniren sie gar nicht regelmässig (wegen der unter diesen Umständen zu geringen Trägheit der Räder). Dann habe ich, nach dem Rathe des Herrn Dr. Fomm, eine kleine Hauptschlussmaschine (bezogen von der Anstalt der Allgemeinen Elektricitäts-Gesellschaft zu Berlin, No. 2839) zur Erzeugung des oscillirenden primären Stromes benutzt, indem dieselbe in eine Wechselstrommaschine dadurch verwandelt worden ist, dass von zwei gegenüberliegenden Collectorstreifchen durch Bürsten stetig der Strom abgenommen wurde. Die Resultate erwiesen sich als sehr gut: wenn die Maschine von 30 Akkumulatoren gespeist ist, macht der Gramm'sche Ring von 4,5 bis 7 Umdrehungen in einer Secunde; der von der Maschine für das Inductorium gelieferte primäre Strom bietet von 9 bis 14 Wechsel der Richtung in einer Sekunde, und die vom secundären Strome bedingte Ladungsdauer des Condensators beträgt

$$\text{von } \tfrac{1}{14} \text{ bis } \tfrac{1}{9} \text{ [sec].}$$

Dabei sind aber die Schwingungen der die Energie des secundären Stromes messenden Electrometernadel merkwürdig regelmässig, und die Berechnung einer Gleichgewichtslage aus Umkehrpunkten gibt eine auffallende Genauigkeit: öfters kommt es vor, dass die vier aus fünf Umkehrpunkten berechneten Gleichgewichtslagen bis auf ein Zehntel eines Scalentheiles übereinstimmen, und zwar bei grossen Schwingungsamplituden. Indessen, wie aus den weiter unten mitgetheilten Zahlen ersichtlich ist, bekommt man unter Anwendung der Wechselstrommaschine

für die D.C.-en von gut iolirenden Flüssigkeiten sehr nahe richtige Werthe. Ich kann also die Anwendung dieser Maschine als ein sehr elegantes Mittel zur Untersuchung der dielectrischen Polarisation in gut isolirenden Substanzen empfehlen.

Beinahe eben so regelmässig sind die Schwingungen der Electrometernadel bei Anwendung des Unterbrechers No. II, wenn nur die Rotationsgeschwindigkeit innerhalb der oben mitgetheilten Grenzen liegt.

Was den Unterbrecher No. I betrifft, so functionirte er überhaupt bei Weitem nicht so regelmässig wie der Unterbrecher No. II. Dieser Umstand ist selbstverständlich dem kleineren Schwunge seines Rades zuzuschreiben. Der Unterbrecher No. I wurde von mir nur im Anfange der Arbeit benutzt, später aber ganz verlassen.

IV. Zur Herstellung von verschiedenen Verbindungen zwischen dem Doppelcondensator, dem Electrometer und dem Inductorium dient mir ein Commutator aus Paraffin. Derselbe gestattet:

1) die obere und mittlere Platte des Doppelcondensators zur Erde abzuleiten (die untere Platte, wie schon erwähnt, bleibt stets mit der Erde verbunden);

2) die obere Platte mit dem isolirten Pole des Inductoriums (der andere Pol stets zur Erde abgeleitet) und gleichzeitig die mittlere Platte mit dem Electrometer in Verbindung zu setzen;

3) das Electrometer allein mit dem erwähnten freien Pole des Inductoriums zu verbinden;

4) das Electrometer mit der oberen Platte und mit dem Inductorium zu verbinden, indem die mittlere Platte isolirt bleibt (NB.: die Anordnung für diese letzte Combination wurde nur bei den Vorversuchen benutzt; da sie

sich als nicht nöthig erwiesen hat, wurde sie später beseitigt).

Alle Verbindungen sind mittelst sehr dünner Messingdrähte hergestellt; zur Unterstützung derselben sind paraffinirte Glasstäbchen und Seidenfäden benutzt.

B. Messungsverfahren.

Nennen wir die obere Zwischenschicht des Doppelcondensators — „Schicht No. 1", die untere — „Schicht No. 2".

Nehmen wir weiter die Capacität des aus der oberen und mittleren Kupferplatte bestehenden Condensators, wenn die Luft die betreffende Zwischenschicht füllt, als Einheit der Capacitäten an, dann ist die Capacität des von der mittleren und unteren Platte gebildeten Luftcondensators auch (sehr nahe: s. oben) gleich Eins. Wenn aber die Schichten No. 1 und 2 mit Flüssigkeiten von D. C.-en δ_1 resp. δ_2 erfüllt sind, so sind die Capacitäten der beiden Condensatoren gleich δ_1 resp. δ_2.

Es sei noch γ die als constant vermuthete Capacität des Electrometers in Doppelschaltung + Capacität des Paraffincommutators + Capacität gesammter Zuleitungsdrähte.

Es seien jetzt die beiden Zwischenschichten mit Flüssigkeiten (δ_1 und δ_2) gefüllt; alle Platten und Electrometer seien zunächst mit der Erde verbunden, dann aber Electrometer und mittlere Platte isolirt und miteinander verbunden, während die obere Platte bis auf das Potential $= V$ geladen wird. Dann bekommt die mittlere Platte ein kleineres Potential $= v$, welches am Electrometer gemessen wird. Wenn wir nun annehmen, dass die beiden Flüssigkeiten und alle benutzten isolirenden Stützen vollkommene Isolatoren seien, so muss offenbar die Gleichung

$$\delta_1 (V - v) = \delta_2 v + \gamma v,$$

oder

$$(V : v) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1 \tag{3}$$

bestehen.

Natürlich kann unsere Voraussetzung in Wirklichkeit nie in ganzer Strenge erfüllt werden. Man vermuthet jedoch, dass diesem ideellen Falle um so mehr genähert wird, je kleiner die Ladungsdauer ausfällt. Darauf beruht die Anwendung von Wechselströmen zur Bestimmung der D. C.-en; die Vermuthung wird von der Erfahrung bestätigt.

Es sei die obere Platte mit dem freien Pole eines Inductoriums, in welchem elektrische Schwingungen vor sich gehen, verbunden; die mittlere Platte aber isolirt und mit einem Electrometer in Doppelschaltung verbunden.

Das Potential der oberen Platte V ist dann eine periodische Function der Zeit t mit der Periode $= \tau$; das Potential der mittleren Platte v ist ebenfalls eine periodische Function von t und zwar mit derselben Periode.

Wenn wir nun

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau V^2 dt = W^2$$

und

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v^2 dt = w^2$$

setzen, so wird anstatt der Gleichung (3) die folgende bestehen:

$$(W : w) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1. \tag{4}$$

Auf unvollkommene Isolatoren angewandt gilt die Gleichung (4) nur angenähert; der oben ausgesprochenen Vermuthung gemäss ist aber die Annäherung um so grösser, je kleiner τ gemacht wird.

Die Grösse w ist nun unmittelbar von dem mit der mittleren Platte verbundenen Electrometer gegeben; und zwar kann sie nach der Gleichung (2) (Abschnitt A, Artikel II) aus dem Werthe des Ausschlages α berechnet werden.

Wie aber kann die Bestimmung von W geschehen?

Das geschieht ganz einfach im Falle, wo die zwei folgenden Voraussetzungen berechtigt sind: 1) dass die „electrostatische Capacität" der secundären Rolle des Inductoriums sehr gross gegen die von uns angenommene Capacitätseinheit erscheint; 2) dass die elektrischen Schwingungen im Inductorium ganz regelmässig vor sich gehen und keine merkliche Aenderung während der zu den weiter beschriebenen Manipulationen nöthigen Zeit erfahren.

Nehmen wir für einen Augenblick an, dass die beiden Voraussetzungen erfüllt seien; dann verfahren wir folgendermassen:

Nachdem der Ausschlag α bestimmt ist, trennen wir sowohl das Electrometer als auch das Inductorium von unserem Doppelcondensator ab und verbinden sie miteinander. Dann entspricht offenbar der neue Ausschlag der Nadel (nennen wir ihn A) dem Potentiale W, d. h. es besteht dann die Gleichung

$$A = a \cdot W^2.$$

In diesem Falle ist also

$$W : w = \sqrt{A} : \sqrt{\alpha},$$

und die Gleichung (4) wird zu

$$(\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1. \qquad (5)$$

Wenn aber die erste von den oben erwähnten Voraussetzungen nicht berechtigt ist, so kann die „electrostatische Capacität" des Inductoriums experimentell bestimmt, und ihr Werth in der von uns angenommenen Einheit angegeben werden. Dann kann man, jedoch unter der An-

gelang, seine Aufgabe auf weniger als etwa fünf Druckbogen zu erledigen.

Die Anregung, auf diesen Gegenstand zurückzukommen, dessen Bearbeitung dem Verfasser lange Zeit als eine undankbare erschien, schöpfte derselbe aus der Kenntnissnahme von gleichgerichteten Bestrebungen des Herrn Prof. Minkowski in Bonn (künftig Königsberg). Minkowski hat bei Teubner[1]) die Voranzeige eines im Drucke befindlichen Werkes betitelt „Geometrie der Zahlen" erscheinen lassen, in welchem eine unvermuthete und fruchtbare Verbindung zwischen der Zahlentheorie und der Geometrie der nirgends concav begrenzten Gebilde hergestellt werden und desswegen auch die Theorie der letzteren ausführlicher in analytischem Gewande behandelt werden soll. Es kommt somit den Eigebilden auch von anderem als rein geometrischem Standpunkt eine gewisse Wichtigkeit zu, und dies hat den Verfasser ermuntert, seine Doctorarbeit in der oben angedeuteten Weise zu ergänzen. Die vorliegende Arbeit wird vermuthlich mit gewissen Capiteln des Minkowskischen Buches in der Materie die grösste Verwandtschaft haben, doch steht zu hoffen, dass bei der grossen Verschiedenheit der Behandlungsmethoden (analytisch und rein geometrisch), sowie des Ausgangspunktes und des Zieles der Forschungen sich doch auch viele wesentliche und instruktive Abweichungen im Ausbau ergeben werden.

Die Untersuchung beschränkt sich auf die ebenen Ovalgebilde, auf deren Theorie sich diejenige der Eigebilde im Raume naturgemäss zu stützen hat.

Die Arbeit beginnt mit einem Abschnitt, der mit dem Namen „Seitenrechnung" betitelt ist. Es stellte sich näm-

---

1) Im Juni 1893 in den Anzeigen. Vgl. auch Bulletin des Sc. math. 2. série t. XVII janv. 1893: Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, par M. H. Minkowski.

lich heraus, dass bei Besprechung der Eigenschaften der Ovale die Hälften, in welche eine Ebene durch eine Gerade, eine Gerade durch einen Punkt zerlegt wird, eine fast bedeutendere Rolle spielen, als die vollständigen Gebilde, dass es fortwährend galt, zwei „Seiten" zu unterscheiden. Um den auf Seiten bezüglichen Schlüssen eine handliche Form und Präcision zu geben, wurden ein Symbol S für „Seite" und symbolische Gleichungen der Form

$$Sa = Sb;\ c;\ d$$
$$Sa = -\ Sb;\ c;\ d$$

eingeführt. Die Bedeutung der ersten Gleichung ist, dass innerhalb einer getrennten Mannigfaltigkeit d die Elemente a, b auf der nämlichen, die der zweiten, dass sie auf verschiedenen Seiten der trennenden Mannigfaltigkeit c liegen. Es wurden die Bedingungen für die Anwendung der Seitenrechnung auf Gerade und Ebene untersucht, d. h. es wurde untersucht, welcher Theil der Axiome für die Ebenengeometrie bei der Seitenrechnung vorauszusetzen ist, resp. welche Fassung diese Axiome erhalten, wenn man den Seitenbegriff in den Vordergrund drängt.

Sodann war die Definition und Nomenclatur einer Anzahl unerlässlicher Grundbegriffe wieder mit steter Rücksicht auf den Seitenbegriff zu geben.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wurde das eigentliche Thema mit der, wie der Verfasser glaubt, einfachsten Definition eines Ovals eröffnet, welche sich nicht auf das Oval als Curve, sondern als Flächenstück bezieht und aussagt, dass eine Gerade der Ebene des Ovals mit dem Oval höchstens ein Stück gemein hat. „Ein Stück", das soll heissen: einen Punkt, oder eine durch zwei Endpunkte begrenzte gerade Strecke. Die Möglichkeit von „Figuren" dieser Eigenschaft liegt auf der Hand, es wurde speciell von der Dreiecksfläche bewiesen, dass sie dazu gehört. Im übrigen wurde über die Figuren, welche der Definition genügen,

keine weitere Voraussetzung gemacht, auch nicht ein Mal die, dass es sich um zusammenhängende Ebenenstücke mit Rand und Inhalt etc. handle, wie es in gegenwärtiger kurzer Darstellung nach obiger Erwähnung des Wortes „Flächenstück" scheinen könnte. Im Gegentheil sucht die Arbeit ihr Verdienst eben darin, rein aus den Axiomen und der Definition alles andere abzuleiten und nicht zu postuliren.

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass das, was Ovalen gemeinsam ist, wieder ein Oval sein muss. Es wird gezeigt, wie der Satz umzukehren ist, und ein Satz über „Ovaldifferenzen" angeschlossen. Gerade Strecken zwischen Ovalpunkten gehören vollständig zum Oval; es sind dabei je nach der Art der Endpunkte verschiedene Fälle zu behandeln (innere Punkte, Randpunkte). Es werden dann die Ovale in Beziehung gesetzt zu Strahlenbüscheln, deren Centrum innerhalb, auf dem Rande, oder ausserhalb des Ovals liegt. Es wird mittels innerer Büschel auf eine erste Art und Weise die Reihenfolge der Randpunkte des Ovals definirt. Die mit Figurpunkten belegten Geraden aus einem äussern oder Randpunkt füllen einen und nur einen von zwei „angelehnten" Geraden begrenzten Winkel. Die beiden von jedem Randpunkt ausgehenden Strahlen = Halbgeraden jener angelehnten Geraden, in deren Strahlwinkel die ganze Figur eingeschlossen liegt, werden Grenzstrahlen genannt, ihre Existenz und Bestimmtheit exact bewiesen.

Eine längere Reihe von Paragraphen beschäftigt sich sodann mit dem Nachweise, dass die Gesammtheit der Ovalrandpunkte die Natur eines stetigen geschlossenen Curvenzuges hat, eine Ovallinie bildet. Gerade hier ist Sorgfalt nöthig, um Sätze, die man mit grosser Bereitwilligkeit unbewiesen anzunehmen geneigt ist, strenge zu begründen. Es gibt für jeden Ovalrandpunkt Nachbarrandpunkte, welche ihm beliebig nahe liegen. Bei dieser Gelegenheit wird der Begriff des „Näherungsbogens" für einen Curvenpunkt *a* ein-

geführt. Ein Näherungsbogen $a\,b$ für a muss die Eigenschaft haben, dass wenn c ein beliebiger Punkt desselben ist, alle zwischen a und c liegenden Bogenpunkte näher an a liegen als c. Um über das Zwischenliegen entscheiden zu können, muss man natürlich durch ein anderes Mittel, als die Entfernung ist, bereits über die „Reihenfolge" der Punkte eine Entscheidung getroffen, wie Kronecker sagt, „ein Fortgangsprincip" aufgestellt haben. Ein solches hat sich für die Ovalrandpunkte oben mittels innerer Strahlbüschel auch bereits ergeben. Es wird gezeigt, dass der ganze Ovalrand sich in eine endliche Anzahl aneinanderschliessender Näherungsbögen zerlegen und somit seine Punkte mittels des Fortgangsprincips der Entfernung sich in Reihenfolge setzen lassen, eine Reihenfolge, welche mit der vorher gewonnenen übereinstimmt. Schwierigkeit für die bei diesem Satz zunächst sich darbietende Beweismethode bot das mögliche Vorkommen gewisser Stellen, die als „Ecken $\geqq \frac{\pi}{2}$" bezeichnet werden, übrigens an einem Oval höchstens viermal auftreten können. Die Schwierigkeit wurde schliesslich mittels eines Satzes überwunden, welcher die Bedingung angibt, unter der ein Curvenbogen Näherungsbogen für seine beiden Endpunkte ist. Es werde gleich hier erwähnt, dass später mittels eines dritten Fortgangsprincipes — nämlich mittels einer parallel verschobenen Geraden — abermals die nämliche Reihenfolge der Ovalrandpunkte, zunächst auf einem Theilbogen erzielt wird.

Die Haupteigenschaft der nun als stetige, geschlossene Curven erkannten Ovalränder besteht darin, dass sie mit Geraden ihrer Ebene höchstens zwei getrennte Punkte oder höchstens eine zusammenhängende Strecke gemein haben.

Die Begriffe der angelehnten Geraden des Ovals und der Tangenten ihres Randes decken sich ihrem Umfange nach, was bei andern Arten von Figuren nicht der Fall ist. Dabei

ist unter einer angelehnten Geraden eine solche zu verstehen, welche Randpunkte des Ovals enthält und alle übrigen Ovalpunkte auf einer Seite liegen hat, und die Tangente ist als Grenzlage einer Secante zu definiren, auf der beide Schnittpunkte als beweglich und gegen einen festen Punkt der Curve hinrückend angenommen werden dürfen, während man gewöhnlich nur den einen beweglich, den andern fest denkt. Wollte man dem Begriff der Tangente diese Weite nicht geben, so würden die angelehnten Geraden in den sogenannten „Ecken" des Ovals nicht sämmtlich auch Tangenten sein, sondern diese Charakterisirung würde nur den beiden äussersten, auf welchen die Grenzstrahlen liegen, zukommen.

Ein besonderer Theil der Arbeit befasst sich mit einer Reihe von Sätzen bezüglich auf die Schnitte von Grenzstrahlen, Tangenten und Secanten untereinander, welche sich, abgesehen von ihrem selbständigen Interesse, für das Folgende als nothwendig erweisen. Es handelt sich nicht um die Thatsache, dass die Tangenten etc. sich schneiden, sondern darum, welche Hälften derselben sich schneiden, und ist daher in diesem Theile der Arbeit die ausgedehnteste Anwendung von der Seitenrechnung zu machen. Die beiden Hälften einer Tangente werden als erste und zweite unterschieden mittels eines von fester Anfangslage ausgehenden, um einen inneren Ovalpunkt in bestimmtem Sinne σ sich drehenden Strahles, welcher die „erste" Hälfte einer Tangente auf seinem Wege vor Erreichung des Berührpunktes, die „zweite" nach dem Passiren desselben überstreicht. Nur für die Tangente des Ausgangspunktes dreht sich die Beziehung um. Einer der hauptsächlichsten Hilfssätze sei zur Charakterisirung hier angeführt: Sind c und d zwei Punkte auf einer der beiden Hälften eines Ovalrandes, in welche derselbe zerlegt wird durch die Berührungspunkte zweier parallelen Tangenten, und geht im Sinne σ genommen der Punkt c dem Punkt d voraus, so schneidet der zweite Grenz-

strahl aus c den ersten aus d, während sich der erste Grenzstrahl aus c und der zweite aus d, oder auch gleichbenannte Grenzstrahlen aus c und d nicht schneiden.

Man gelangt zu dem Satze, dass es für die Feststellung der Reihenfolge der Tangenten gleichgültig ist, ob man die Reihenfolge ihrer Berührungspunkte auf sie überträgt oder die Reihenfolge der Strahlen eines Büschels (mittels Parallelität) auf die „ersten" oder „zweiten" Hälften der Tangenten. Nur lässt das eine Fortgangsprincip unter Umständen die Reihenfolge eines Theiles der Tangenten unbestimmt und willkürlich, während das andere dieselbe eindeutig bestimmt. Die Totalkrümmung eines Ovalrandbogens ergibt sich demnach stets grösser als die eines Theiles von ihm, die Gesammtkrümmung des Randes natürlich zu 2π.

Es werden dann weiter die an einem Ovalrand möglicherweise vorkommenden Singularitäten: Ecken und gerade Stellen besprochen. Ecken sind solche Randpunkte, deren Grenzstrahlen einen Winkel $< \pi$ miteinander einschliessen. Die Grösse einer Ecke soll jedoch durch den Ergänzungswinkel dieses Winkels gemessen werden. Ecken, deren Grösse über einer endlichen Grenze bleibt, gibt es an einem Ovalrand nur in endlicher Anzahl. Dies schliesst nicht aus, dass die Anzahl der endlich grossen Ecken an einem Ovalrand über jede Zahl hinaus wächst, was nur eine geometrische Einkleidung der Thatsache ist, dass die Summe endlicher Grössen, deren Anzahl über jede Zahl hinauswächst, eine gewisse endliche Zahl nicht zu übersteigen braucht. Es gibt Ovale mit Rändern, von denen man kein noch so kleines Stück angeben kann, auf dem nicht Ecken endlicher Grösse enthalten wären. Es wird ein Beispiel eines solchen Ovales construirt, es werden die dualen Betrachtungen angedeutet, bei denen statt der Ecken gerade Strecken des Ovalrandes eintreten, und die genauere Discussion dieser nicht uninteressanten Curven einem anderen Orte vorbehalten. Das Gesagte

lässt ermessen, welche Hindernisse der allgemeinen Formulirung des Krümmungsmasses für Ovalränder in den Weg treten. Man hat bei einem allgemein definirten Oval keine Garantie dafür, dass das Krümmungsmass in einem Randpunkt nicht eine vollkommen unstetige Function der Lage des Randpunktes ist.

Wesentlich andere Singularitäten ergeben sich auf Ovalrändern als ausgeschlossen, insbesondere eigentliche Doppelpunkte, Wendepunkte, Rückkehrpunkte, Doppeltangenten. Nur jene Ausartungen eines Ovals, für welche auch sonst die gegebenen Sätze nur cum grano salis zu verstehen sind: der einzelne Punkt und die einzelne gerade Strecke, nehmen auch hier eine gewisse Ausnahmestellung ein.

Bisher ist die Ovallinie nur als Rand eines sogenannten „vollen“ Ovals, d. h. eines Flächenstückes von gewissen Eigenschaften definirt. Es ist erwünscht durch Umkehr früherer Sätze unabhängige Definitionen für die Ovalcurven zu erhalten. Bei dem hierauf gerichteten Bestreben ergeben sich Sätze wie die folgenden:

Eine im Endlichen liegende, stetige, geschlossene Curve aus einem Zug, die mit einer Geraden höchstens 2 Punkte oder höchstens eine gerade Strecke gemein hat, ist stets Berandung eines vollen Ovals.

Oder:

Eine im Endlichen liegende etc. etc. Curve, welche in jedem Punkt angelehnte Gerade aufweist, ist ein Ovalrand.

Nur für den Fall, dass man unter die obigen geschlossenen Curvenzüge auch gewisse Doppelcurven (uneigentlich geschlossene) einschliesst, muss den Sätzen eine Clausel angehängt werden.

Schliesslich werden sorgfältig ausgeführte Beweise dafür erbracht, dass jede Ovallinie eine bestimmte Länge, jedes volle Oval einen bestimmten Inhalt hat. Um die Nothwendigkeit dieser Beweise einzusehen, muss nochmals darauf

hingewiesen werden, dass wir nichts uns als gegeben betrachten wollen, als die Axiome, die Oval-Definition und das, was wir daraus abgeleitet haben, dass wir dagegen, was die Anschauung uns darbietet, mag es noch so plausibel erscheinen, nicht ungeprüft annehmen dürfen. Wir müssen diese Strenge der Auffassung innehalten, wenn wir wünschen, dass unseren geometrischen Sätzen auch ein functiontheoretischer Werth zukomme. Machen wir uns aber diese Auffassung zu eigen, so erscheint es eher wunderbar, als selbstverständlich, dass aus jener einfachen Definition des Ovals die ziemlich verwickelten Bedingungen folgen, welche das Vorhandensein einer mathematisch wohldefinirten Länge und eines wohldefinirten Inhaltes gewährleisten. Es ist die angewandte Vorsicht auch in Anbetracht der Erfahrung nöthig, dass es z. B. wirklich Curven gibt von scheinbar einfachem Verlauf, welche doch keine bestimmte Länge besitzen. Wir müssen, um beruhigt mit Ovalen operiren zu können, die absolute Sicherheit gewinnen, dass keine bisher unbemerkten die Allgemeinheit der aus der Anschauung geschöpften Sätze störenden Einzelfälle möglich sind.

Auf das Detail der Beweise kann hier nicht eingegangen werden.

Ein Satz über Eiflächen.

Im Anschluss an das Vorstehende sei es gestattet, einen Hauptsatz aus des Verfassers Doctorarbeit gegen etwaige Einwendungen sicherzustellen. Derselbe lautet (Ov. u Eifl. S. 23):

1. „In einer Eifläche findet sich unter einer Schaar von parallelen ebenen Schnitten ein und nur ein Maximum an Inhalt, das entweder durch *eine* Schnittfigur oder durch *eine* stetige Folge congruenter Schnittfiguren gebildet ist, die einen Cylindertheil bilden.

Der Beweis des ersten Theiles des Satzes lässt sich, ohne dass er im wesentlichen irgendwie geändert würde, vermittels der im vorausgehenden Referate beschriebenen Untersuchungen schärfer präcisiren. Bezüglich der letzten Behauptung des Satzes, dass ein Cylindertheil entsteht, hat mich Herr Professor Minkowski aufmerksam gemacht, dass die in meiner Doctorarbeit (III, 9, 10) gegebenen Andeutungen des Beweises in Anbetracht einer auftretenden Schwierigkeit doch gar zu dürftig sind. Es möge dem Verfasser gestattet sein, diese Lücke hier auszufüllen.

2. Satz:

Wenn eine Eifläche $\mathfrak{E}$ drei ebene Parallelschnitte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ von gleichem Inhalt $\mathfrak{J}$ aufweist, so sind diese Schnitte von congruenter Form, ähnlich gelegen und die Begrenzung von $\mathfrak{E}$ zwischen den Ebenen der beiden äussern Schnitte $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ ist ein Cylindermanteltheil.

Beweis.

3. Voraus schicken wir als Hilfssatz: An einem von zwei Rechtecken gleichen Inhalts i als Deckflächen begrenzten „Obelisken" ist der Inhalt m eines parallel zu den Deckflächen geführten ebenen Schnittes A grösser als i, gleich nur dann, wenn die Deckrechtecke congruent sind, s. Ov. u. Eifl. S. 23. Es folgt aus den dort gegebenen Formeln

$$m - i = \lambda\lambda' \frac{(b' - b)^2}{b'} . \, a; \; (\lambda + \lambda' = 1) \; (0 < \lambda < 1)$$

a und a' sind die Längen der Seiten des einen Deck-Rechtecks, b und b' die Längen der resp. parallelen Seiten des andern.

4. Den Eiflächenschnitt $\mathfrak{A}$ zerlegen wir nun durch parallele Gerade A_0, A_1, $A_2 \ldots A_n$ der Richtung ϱ in Streifen, ebenso $\mathfrak{B}$ durch die Geraden B_0, $B_1 \ldots B_n$, $\mathfrak{C}$ durch C_0,

$C_1 \ldots C_n$; alle diese Geraden seien ebenfalls von der Richtung ϱ. A_0, B_0, C_0 speciell seien die Tangenten (angelehnten Geraden) der Richtung ϱ der Schnittovale auf der linken, A_n, B_n, C_n die desgleichen auf der rechten Seite, und die Geraden sollen von links nach rechts nach Angabe ihrer Indices aufeinander folgen. Der Inhalt eines Ovalstreifens zwischen zwei aufeinander folgenden Parallelgeraden werde durch die in runde Klammer gesetzten Buchstaben der Geraden ausgedrückt und es sei die Eintheilung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ so getroffen, dass

$$(A_\nu A_{\nu+1}) = (C_\nu C_{\nu+1}) \qquad \nu = 0, 1 \ldots n-1$$

B_ν sei die durch die Verbindungsebene von A_ν und C_ν in der Ebene von $\mathfrak{B}$ ausgeschnittene Gerade. Wir nennen die Streifen $(A_\nu A_{\nu+1})$, $(B_\nu B_{\nu+1})$, $(C_\nu C_{\nu+1})$ entsprechende. Im folgenden werden an Stelle der Streifen Rechtecke treten zwischen den nämlichen Parallelgeraden, welche wir durch die in eckige Klammer gesetzten Buchstaben der Geraden ausdrücken. Die auf den Geraden A, B, C liegenden Seiten dieser Rechtecke nennen wir die „Langseiten"; die andern, die „Schmalseiten" gehen von den Endpunkten der Ovalsehnen auf A_ν, B_ν, C_ν aus nach rechts. Beim Beweis vom Inhalt der Ovale ist vom Verfasser gezeigt, dass bei genügend enger Annahme der Geraden A die Summe der Rechtecke einer festen Grösse, dem Inhalte $\mathfrak{J}$, beliebig nahe kommt. Es fragt sich nun, ob sich die Theilung von $\mathfrak{A}$ so annehmen lässt, dass auch die davon abhängigen Theilungen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ unseren Wünschen entsprechend eng genug werden, d. h. dass zu gleicher Zeit

$$\mathfrak{J} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [A_\nu A_{\nu+1}] < \mathfrak{J} + \varepsilon; \mathfrak{J} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [C_\nu C_{\nu+1}] < \mathfrak{J} + \varepsilon$$

$$\mathfrak{J} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [B_\nu B_{\nu+1}] < \mathfrak{J} + \varepsilon$$

wird. In der That ist dies möglich und lässt sich beweisen auf Grund folgender Thatsachen:

a) Wenn 𝔄 kein entartetes Oval ist, so sind auch 𝔅 und ℭ eigentliche Ovale und es hat in ihnen jede von einer Tangente wenn auch noch so wenig entfernte parallele Sehne endliche Länge.

b) Bei genügender Annäherung einer parallelen Sehne an eine Tangente wird der zwischen beiden enthaltene Ovalstreifen beliebig klein seinem Inhalte nach.

c) Es ist möglich, durch genügende Annäherung von A_1 und A_0 die Entfernungen von A_0 und A_1, C_0 und C_1 zu gleicher Zeit unter eine beliebig kleine Grösse herabzudrücken, zugleich auch die Entfernung von B_0 und B_1, weil sie linear von jenen abhängt. Analoges gilt von $A_{n-1} A_n$, $C_{n-1} C_n$, $B_{n-1} B_n$.

d) Die Breite eines Rechtecks mit noch so kurzer, constanter Langseite, das einem gegebenen flächengleich ist, wird beliebig klein, wenn nur das gegebene Rechteck genügend klein an Inhalt ist. (In Anwendung zu bringen für die mittleren Seiten.)

5. Wir beweisen weiterhin: Die Sehnen auf A_ν und C_ν sind längengleich.

Denn nehmen wir ein Mal an:

$$A_\mu - C_\mu = d_\mu; \qquad d_\mu > 0.$$[1]

a_μ, c_μ seien die obern, α_μ, γ_μ die untern Endpunkte der resp. Sehnen A_μ, C_μ, und sei $0 < \mu < n$. Irgend ein rechts (oder links) von A_μ in endlicher Entfernung innerhalb 𝔄 gelegener Punkt heisse p, die von c_μ und γ_μ nach rechts (oder links) ziehenden Grenzstrahlen seien C'_μ und Γ'_μ. Man lege Ebene ℭ auf Ebene 𝔄, Gerade C_μ auf Gerade A_μ und zwar so, dass die Strecke $c_\mu \gamma_\mu$ ganz innerhalb der Strecke $a_\mu \alpha_\mu$ liegt,

1) A_μ, C_μ bezeichnen jetzt kurz die Sehnenlängen.

γ_μ zwischen c_μ und α_μ, so dass $\overline{a_\mu c_\mu}$, $\overline{\alpha_\mu \gamma_\mu}$ von Null verschieden sind. Dann müssen auch $\overline{c_\mu s}$ und $\overline{\gamma_\mu \sigma}$ endlich sein, wo s, σ die resp. zweiten Schnittpunkte von C'_μ, Γ'_μ mit dem Rande des Dreiecks $a_\mu p \alpha_\mu$ sind, welches sich innerhalb $\mathfrak{A}$ befindet. Es sei die Gerade $G \parallel C_\mu$ und

$$Ss = S\sigma = -SC_\mu;\ G,$$

dann liegen ersichtlich alle zwischen C_μ und G parallel zu C_μ gezogenen $\mathfrak{C}$-Sehnen innerhalb $\mathfrak{A}$, sind also kleiner wie die entsprechenden $\mathfrak{A}$-Sehnen und zwar wird der Unterschied entsprechender Sehnen in diesem Intervall über einer von den übrigen Daten der Figur abhängigen angebbaren endlichen Grenze Δ bleiben. Es ist erlaubt, die Theilung so eng anzunehmen, dass sowohl $A_{\mu+1}$, als $C_{\mu+1}$ in das Intervall $C_\mu G$ fallen.

Wir verdichten die Theilung der Streifen $(A_\mu A_{\mu+1})$ und $(C_\mu C_{\mu+1})$ durch Einschiebung der Geraden

$$A_{\mu,1},\ A_{\mu,2}\ \ldots\ A_{\mu,q}$$
$C_{\mu,1},\ C_{\mu,2}\ \ldots\ C_{\mu,q}$ u. der „entsprechenden“[1]
$B_{\mu,1},\ B_{\mu,2}\ \ldots\ B_{\mu,q}$ in $\mathfrak{B}$ und setzen
$$A_{\mu,0} \equiv A_\mu;\ A_{\mu,q+1} = A_{\mu+1};\ C_{\mu,0} \equiv C_\mu \text{ etc.}$$

Die Entfernung von $A_{\mu,\varkappa}$ und $A_{\mu,\varkappa+1}$ kürzen wir durch $e_{\mu,\varkappa}$, welches somit die Länge einer Rechteckschmalseite ist. Nun ist

$$D_{\mu x} \equiv [B_{\mu,x},\ B_{\mu,x+1}] - [A_{\mu,x},\ A_{\mu,x+1}]$$
$$= \lambda\lambda' \frac{(A_{\mu,x} - C_{\mu,x})^2}{C_{\mu x}} \cdot e_{\mu,x}$$

nach 3. Bedenkt man, dass $A_{\mu,x} - C_{\mu,x} > \Delta$, und setzt den grössten Werth unter den $C_{\mu,x}$ gleich C, so kommt:

$$D_{\mu,x} > \lambda\lambda' \frac{\Delta^2}{C} \cdot e_{\mu,x} \text{ und } \sum_{x=0}^{x=q} D_{\mu,x} > \lambda\lambda' \frac{\Delta^2}{C} \sum_{x=0}^{x=q} e_{\mu,x}$$

1) Die unter 4. festgesetzte Art der Abhängigkeit zwischen den Geraden, welche mittels der Buchstaben A, C, B bezeichnet werden, soll auch für die neuen Geraden gelten.

oder $$\sum D_{\mu,x} > \lambda\lambda' \frac{\Delta^2}{C} . e = K$$

wenn e die Entfernung von A_μ und $A_{\mu+1}$ bedeutet. Die rechts stehende Grösse K in der Ungleichung ist nun ganz unabhängig von dem Grad der Enge der Theilung zwischen A_μ und $A_{\mu+1}$.

Da weiter, nach dem Hilfsatz, die übrigen ausserhalb des bisher betrachteten Intervalls $(\mu, \mu + 1)$ gelegenen Rechtecke $[B_\nu B_{\nu+1}]$ niemals kleiner sind als die entsprechenden $[A_\nu A_{\nu+1}]$, so gilt für jede noch so weit getriebene Theilung, sobald die $A_{\mu x}$ schon vorliegen, und die Geraden wieder durchlaufend mit einem Index bezeichnet werden:

$$\Sigma [A_\nu A_{\nu+1}] + K < \Sigma [B_\nu B_{\nu+1}]$$

im Widerspruch zu der aus 4. folgenden Ungleichung:

$$\Sigma [B_\nu B_{\nu+1}] - \Sigma [A_\nu A_{\nu+1}] < 2\varepsilon$$

welche für beliebig klein gegebenes ε (also auch für $2\varepsilon < K$) gelten soll bei genügend enger Theilung.

Auf solchen Widerspruch führt uns die Annahme, A_μ und C_μ seien verschieden, also muss

$$A_\mu = C_\mu$$

sein. q. e. d.

Eine Ergänzung bedarf der Beweis für den Fall, dass μ gleich 0 oder n gesetzt wird. Dann und nur dann können C'_μ und Γ'_μ in die Richtung von C_μ selbst fallen. In diesem Falle bestimme man auf dem Ovalrande, doch nicht auf $\overline{c_\mu \gamma_\mu}$, zwei Punkte c', γ' innerhalb von Kreisen, die mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ um c_μ, γ_μ resp. geschlagen sind. ε sei jedenfalls kleiner als die endlichen Sehnen der von c_μ, γ_μ ausgehenden Näherungsbögen. Dann lege man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ wie oben aufeinander und mache ε auch noch kleiner als die endlichen Entfernungen der Punkte c_μ, γ_μ von den Geraden $a_\mu p$, $\alpha_\mu p$ resp, wobei p wieder einen inneren Punkt von $\mathfrak{A}$ bedeutet.

$C_1 \parallel C_0$ werde so nahe an C_0 gerückt, dass beide kleinen Kreise um c_0, γ_0 geschnitten werden (resp. C_{n-1} so nahe an C_n etc.). Dann enden die Sehnen C_0 und C_1, sowie alle dazwischen liegenden parallelen Sehnen von $\mathfrak{C}$ innerhalb der Kreise und sind kleiner als die entsprechenden Sehnen von $\mathfrak{A}$ (Analoges gilt bei C_n, C_{n-1}) um eine Differenz, welche über einer angebbaren endlichen Grösse bleibt. Von hier aus vollzieht sich der Beweis genau wie vorher.

Unser bisheriges Resultat können wir so formen:

Schneiden die parallelen Sehnen A_μ, C_μ von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ resp. Stücke gleichen Inhalts ab, welche auf *einer* Seite der Ebene $A_\mu C_\mu$ liegen, so ist ihre Länge gleich.

Hieraus folgt weiter:

6. Die Entfernung von A_0 und A_μ ist gleich der von C_0 und C_μ.

Man findet nämlich, dass bei genügend enger Theilung die Inhalte und damit die Schmalseiten zweier entsprechenden Rechtecke sich nur noch um einen beliebig kleinen Bruchtheil ihrer Grösse unterscheiden. Daher wird sich auch die Summe der Schmalseiten der Rechtecke zwischen A_0 und A_μ von der entsprechenden Summe zwischen C_0 und C_μ bei genügend enger Theilung beliebig wenig unterscheiden, d. h. die beiden Summen müssen dann, weil constante Grössen, gleich sein.

7. Aus dem bisher Bewiesenen ergibt sich zwar noch nicht die Congruenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, aber doch so viel, dass $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{A}$ durch eine Transformation hervorgeht, bei welcher die Sehnen der Richtung ϱ von $\mathfrak{C}$ in ihren Geraden ohne Aenderung der Länge verschoben werden. Die völlige Willkürlichkeit der Richtung ϱ zieht die Congruenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ indess nothwendig nach sich, wie wir sehen werden.

8. Die Entsprechung zwischen den Sehnen A_μ, C_μ zieht eine Entsprechung der Endpunkte a_μ, c_μ einer-, α_μ, γ_μ andrer-

seits nach sich. Bedenkt man noch, dass $\overline{a_0 \alpha_0}$ und $\overline{c_0 \gamma_0}$, $\overline{a_n \alpha_n}$ und $\overline{c_n \gamma_n}$ congruent sind, so erkennt man, wie die Ränder von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ für jede Richtung ϱ der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ Punkt für Punkt aufeinander in bestimmter Weise beziehbar sind. Die geraden Strecken zwischen entsprechenden Randpunkten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ bilden ein Stück $\mathfrak{M}$ einer Regelfläche, welches ganz innerhalb oder höchstens auf der Fläche $\mathfrak{E}$ selbst liegt; es liegt also auch die Schnittfigur $\mathfrak{S}$ der Ebene von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{M}$ völlig innerhalb $\mathfrak{B}$ oder reicht wenigstens nicht über dessen Rand hinaus.

Somit ist Inhalt von $\mathfrak{S}$ kleiner höchstens gleich $\mathfrak{J}$, letzteres nur, wenn $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{B}$ identisch sind. Zugleich ist aber nach 1. Inhalt von $\mathfrak{S}$ grösser höchstens gleich $\mathfrak{J}$.[1]) Inhalt $\mathfrak{S}$ kann daher nur gleich $\mathfrak{J}$, und $\mathfrak{S}$ muss mit $\mathfrak{B}$ identisch sein. Auf jeder erzeugenden Strecke von $\mathfrak{M}$ liegt daher ausser einem Punkte a_μ, resp. α_μ und einem Punkte c_μ, resp. γ_μ ein dritter Punkt b_μ, resp. β_μ der Fläche $\mathfrak{E}$, woraus folgt, dass diese Strecken vollständig **auf** $\mathfrak{E}$ liegen, $\mathfrak{M}$ ein Theil von $\mathfrak{E}$ ist.

9. Unser Beweis wird nun vollendet:

a) **Durch Verwendung der Maximalsehne bestimmter Richtung in den Ovalen;**

b) **Durch Benutzung der Thatsache, dass gewisse Theile der Eifläche, resp. der Ovale, welche durch Abschneiden mittels Gerader und Ebenen entstehen, die nämlichen Eigenschaften haben müssen, wie die ganzen Ovalgebilde.**

10. Hilfsatz. Die Sehnen $a_0 a_n$ und $c_0 c_n$ müssen parallel und gleichlang sein.

---

1) Denn die Annahme, dass zwischen zwei gleich grossen Parallelschnitten von $\mathfrak{E}$ ein kleinerer Parallelschnitt sich befinde, ist mit dem Vorhandensein nur **eines** Maximums unverträglich.

Aus 6. folgt:

$$\text{Entfernung } (A_0 A_n) = \text{Entfernung } (C_0 C_n)$$

$$\overline{a_0 \alpha_0} = \overline{c_0 \gamma_0}$$

$$\overline{a_n \alpha_n} = \overline{c_n \gamma_n}$$

Maximalsehne d. Richt. $(a_0 a_n)$ in $\mathfrak{A}$ = Max.-S. d. Richt. $(a_0 a_n)$ in $\mathfrak{C}$

„ „ „ $(c_0 c_n)$ „ $\mathfrak{C}$ = „ „ „ $(c_0 c_n)$ „ $\mathfrak{A}$

Weiter:

Wenn eine Folge von Maximalsehnen der Richtung $a_0 a_n$ in $\mathfrak{A}$ ein Parallelogramm bildet, so müssen die Maximalsehnen der nämlichen Richtung in $\mathfrak{C}$ ein congruentes Parallelogramm erfüllen, da hier wie dort Gerade von gleicher Länge zwischen parallelen angelehnten Geraden gleicher Entfernung eingespannt werden, also hier wie dort gleiche Neigung gegen letztere haben, und hier wie dort wegen 5. und 6. die erste von der letzten Maximalsehne den nämlichen Abstand hat. Analoges gilt bei Vertauschung der Rollen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$.

Wir dürfen ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit unserer Annahmen die Bezeichnungen so vertheilt voraussetzen, dass:

$$\overline{a_0 \alpha_0} \leqq \overline{a_n \alpha_n} \quad \text{also auch} \quad \overline{c_0 \gamma_0} \leqq \overline{c_n \gamma_n} \text{ ist.}$$

Man bringe nun durch Parallelverschiebung a_0 mit c_0, α_0 mit γ_0 und dadurch A_n mit C_n zur Deckung. Würden hierauf a_n und c_n nicht aufeinanderfallen, sondern ein Punkt „unter“ den andern — z. B. c_n unter a_n — so würde entgegen erwiesener Thatsache ein Parallelogramm von Maximalsehnen des einen Ovals im andern kein congruentes Analogon finden können — z. B. das Parallelogramm mit den Ecken α_0, a_0, α_n kein Analogon in $\mathfrak{C}$ — folglich müssen nach der Parallelverschiebung auch a_n und c_n sich decken. Also ist $\overline{a_0 a_n} = \overline{c_0 c_n}$. Der Beweis ist auch für den Fall gültig, dass in

den Ovalen nur eine einzige Maximalsehne der betrachteten Richtung existirt. Analoges wie für a_0, a_n, c_0, c_n gilt für α_0, α_n, γ_0, γ_n.

Zurück zum Beweise des Hauptsatzes! (s. Fig. 1 und 2)

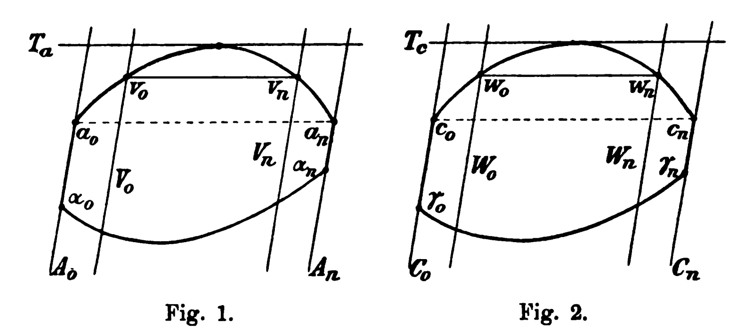


Fig. 1. Fig. 2.

Die angelehnten Geraden von 𝔄 und 𝔈, welche den Sehnen $a_0 a_n$ und $c_0 c_n$ parallel sind und deren Berührpunkte zu den a und c, nicht zu den α und γ gehören, sollen resp. T_a und T_c heissen. Nach 6. ist die Entfernung von T_a und $\overline{a_0 a_n}$ gleich der von T_c und $\overline{c_0 c_n}$. Wir betrachten jetzt für die Ebene 𝔄 die Geraden A_0 und T_a, für 𝔈 die Geraden C_0 und T_c als Axen (X und Y resp.) cartesischer Coordinatensysteme und nennen Punkte und Figuren in beiden Ebenen entsprechend, wenn sie die nämlichen Grössen zu resp. Coordinaten haben.

Es werde nun in 𝔄 zu A_0 irgend eine parallele Sehne V_0 gezogen, in 𝔈 die entsprechende W_0. Die zu den a gehörigen Endpunkte mögen resp. v_0, w_0 heissen. Von v_0 ziehe man dann eine Sehne parallel T_a, deren anderer Endpunkt v_n heisse und durch diesen wieder eine Sehne V_n parallel V_0. In 𝔈 ziehe man zu V_n die entsprechende Sehne W_n, deren zu den c gehöriger Endpunkt w_n heisse.

Der zwischen 𝔄 und 𝔈 liegende Theil der „vollen" Eifläche 𝔈 ist seitlich durch ein Regelflächenstück 𝔐 begrenzt und bildet selber eine volle Eifläche 𝔉. Die Ebenen (V_0, W_0)

und (V_n W_n) schneiden von $\mathfrak{F}$ gewisse Theile ab, ebenso von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, aber das übrigbleibende ist wieder eine Eifläche $\mathfrak{G}$ mit Deckovalen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$; der Mittelschnitt $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{F}$ wird zu einem Mittelschnitt $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{G}$ zugestutzt, der ebenfalls ein Oval ist und den nämlichen Inhalt erhält wie die gleichen Ovale $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$. Folgt alles aus den vorhergehenden Sätzen. Wir können daher auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ die nämlichen Schlüsse anwenden wie auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, erhalten also durch Anwendung unseres letzten Hilfsatzes: $\overline{v_0 v_n}$ ist gleich und parallel zu $\overline{w_0 w_n}$. Ausserdem ist nach 6.

Entf. (T_a, $\overline{v_0 v_n}$) = Entf. (T_c, $\overline{w_0 w_n}$) und nachdem schon Entf. (V_0 A_0) = Entf. (W_0 C_0)
Entf. (V_n A_0) = Entf. (W_n C_0)

ist, so erkennt man leicht, dass v_0 und w_0, v_n und w_n für beide Coordinatensysteme entsprechende Punkte sind. V_0 und v_0 waren aber ganz beliebig, und was auf Seite der a gilt, gilt analog auf Seite der α, daher stellen sich die Ovale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ als entsprechende Figuren beider Coordinatensysteme und als congruent heraus. q. e. d.

Im Austausch gegen meinen Beweis hat mir Herr Professor Minkowski einen analytischen Beweis des nämlichen Satzes mitgetheilt, der sich auch auf Gebilde von mehr als drei Dimensionen erstreckt.





Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 135. Stiftungstages

am 28. März 1894.

Der Classensecretär Herr C. v. Voit gedachte der seit dem vorigen Stiftungstage gestorbenen Mitglieder.

Die mathematisch-physikalische Classe hat im verflossenen Jahre zwei einheimische Mitglieder durch den Tod verloren, das ordentliche Mitglied Johann Bauschinger und das ausserordentliche Mitglied Adolf Steinheil. Dann acht auswärtige und correspondirende Mitglieder: die Mathematiker Ernst Eduard Kummer in Berlin und Moritz Abraham Stern in Göttingen; die Physiker John Tyndall in London und Heinrich Rudolf Hertz in Bonn; die Zoologen Alexander Theodor von Middendorff in St. Petersburg und Peter J. van Beneden in Löwen; den Botaniker Alphonse de Candolle in Genf und den Geologen Arcangelo Scacchi in Neapel.

Johann Bauschinger.

Am 25. November 1893 starb im 59. Lebensjahre das ordentliche Mitglied der Classe, Johann Bauschinger, Professor der technischen Mechanik und graphischen Statik an der hiesigen technischen Hochschule, nachdem er nur ein Jahr lang unserer Akademie angehört hatte. Er hat in der Stille der Arbeitsstube und des Laboratoriums als ein echter, sein ganzes Leben der Wissenschaft dienender Gelehrter eine Reihe wichtiger Arbeiten auf dem Gebiete der Wärmelehre und der Festigkeitslehre ausgeführt und sich dadurch einen bedeutenden Namen gemacht.

Bauschinger wurde am 11. Juni 1834 zu Nürnberg geboren. Das Geschick hatte ihn in ärmliche Verhältnisse gesetzt, aber ihm dafür mancherlei Fähigkeiten mit auf den Weg gegeben. Der Vater war ein einfacher Handwerker, der eine zahlreiche Familie zu ernähren hatte; es muss schon in dem Knaben ein hohes Maass von Energie und sittlichem Ernst, die ihm stets zu eigen geblieben sind, gewohnt haben, denn bereits im Alter von 14 Jahren erwarb er sich durch Stundengeben die Mittel zum Lebensunterhalt. Er liess sich durch Entbehrungen und Hindernisse nicht abschrecken, sondern gewöhnte sich, nicht in äusserlichen Vergnügungen, sondern in dem Streben nach Höherem seine Freude zu suchen. Der ganz auf seine eigene Kraft Angewiesene empfand aber auch bald den Segen, der in der Arbeit ruht.

Frühe zeigte sich in ihm eine besondere Begabung und Neigung für die mathematischen Naturwissenschaften; er besuchte in seiner Vaterstadt die Gewerbeschule und dann die polytechnische Schule mit grossem Erfolge, so dass er im Jahre 1853 das Absolutorium der letzteren mit Auszeichnung bestand und nebenbei gleichzeitig auch das der Lateinschule.

Es war von Anfang an der Wunsch Bauschinger's sich dem Lehrfach der Mathematik und Physik zu widmen; er trat daher an die hiesige Universität über, woselbst er als „Techniker" die kleine Matrikel erhalten hatte und sieben Semester verblieb. Zunächst wurde er hier mit dem hervorragenden Physiker Simon Ohm, der leider schon im Jahre 1854 starb, näher bekannt; er schätzte denselben als Lehrer ausserordentlich hoch, da er ihm in seiner Ausbildung viel verdankte und in ihm einen stets hilfsbereiten Berather fand. Er hörte nicht nur seine Vorlesungen über Experimentalphysik und die physikalischen Uebungen, sondern durfte auch an den bekannten abendlichen Zusammenkünften in dem Franziskanerkeller Theil nehmen, wobei physikalische Fragen zu ernster Besprechung kamen. Ausserdem gelang es dem strebsamen, den Namen eines Studenten mit Recht tragenden Jünglings, in der Sternwarte in Bogenhausen, deren Vorstand Lamont war, auf Empfehlung Ohm's, Aufnahme zu finden; er konnte sich daselbst in theoretischer und praktischer Astronomie sowie in höherer Mechanik ausbilden, besonders aber auch in der Behandlung und Beobachtung mit magnetischen, elektrischen und meteorologischen Instrumenten, was für ihn später von grossem Vortheil war.

Im Jahre 1856 machte er die Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik mit und bestand sie mit der ersten Note, worauf er alsbald als Aushilfslehrer für Physik und darstellende Geometrie an der polytechnischen Schule in Augsburg Verwendung fand. Ein Jahr darauf wurde er als Lehrer der Mathematik und Physik an der Gewerbeschule in Fürth angestellt, woselbst er neun Jahre zubrachte. Hier begannen neben einer angestrengten Lehrthätigkeit die ersten wissenschaftlichen Arbeiten Bauschinger's; der Tag war durch die Schule in Anspruch genommen, ein Theil der Nacht dem Studium und den Versuchen gewidmet. Diese seine Arbeiten lenkten die Aufmerksamkeit der Kreise der Wissen-

schaft und der Technik sowie der Staatsregierung auf den jungen Gelehrten. Er wurde im Jahre 1866 an das Realgymnasium zu München versetzt, kam aber zwei Jahre darauf an die richtige Stelle, nämlich an die damals neu gegründete technische Hochschule dahier, an der er durch die Einsicht ihres ersten Direktors, des Geheimraths v. Bauernfeind, die Professur für technische Mechanik und graphische Statik erhielt.

Hier war dem nun im 34. Lebensjahre Stehenden die seinen Talenten völlig entsprechende Wirksamkeit eröffnet. Er beschränkte sich dabei nicht nur auf theoretische Vorlesungen, sondern gründete alsbald für sein Fach ein Laboratorium, wie es der Physiker oder der Chemiker besitzt. Er hatte nämlich mit klarem Geiste erkannt, dass die technische Mechanik nicht mehr auf der Empirie beruhen dürfe, sondern eine wissenschaftliche Grundlage durch Thatsachen haben müsse, und um diese zu erhalten ein besonderes Laboratorium nothwendig sei. Nach vielen Bemühungen konnte er im Jahre 1870 ein mechanisch-technisches Laboratorium eröffnen, welches anfangs noch provisorisch untergebracht war; erst im Jahre 1873 wurde für solche Zwecke auf dem Areal der technischen Hochschule ein eigenes Haus erbaut, das ganz nach seinen Plänen eingerichtet wurde und ein Muster und Vorbild für alle Anstalten der Art geworden ist. Durch die Gründung dieses Laboratoriums, einer Versuchsstation für die Festigkeitslehre, namentlich der Baumaterialien, wirkte Bauschinger bahnbrechend: er hat durch seine zahlreichen und genauen Versuche der Mechanik eine feste Basis geschaffen.

Seine ersten in Fürth (1863—65) entstandenen wissenschaftlichen Arbeiten sind noch rein theoretischer Natur und beziehen sich auf die Grundgesetze der mechanischen Wärmelehre. Dieselben müssen als wichtige Vorarbeiten für die von Clausius so glänzend durchgeführte mechanische Wärme-

theorie bezeichnet werden. Ueber den sogenannten Entropiebegriff entspann sich zwischen ihm und Clausius eine Controverse, welche zu wissenschaftlich interessanten Ergebnissen führte und darthat, dass Bauschinger seinem berühmten Gegner vollständig gewachsen war. Im Speziellen behandelte er dann das wichtige Problem des Ausströmens von Gasen und Dämpfen sowie auch das des Druckes im Erdinnern, indem er in seinen Bemerkungen zu einigen Stellen von Heim's Untersuchungen „über den Mechanismus der Gebirgsbildung“ aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre einige interessante Resultate über das Gleichgewicht der Erdkugel ableitete, welche dabei als feste, von einer Flüssigkeit erfüllte Hohlkugel gedacht wird. Er erkannte als einer der Ersten, dass beide Probleme nur unter Zuziehung der Prinzipien der Wärmetheorie eine befriedigende Lösung finden können. Wenn dieselben auch damals nicht zum Abschluss gebracht wurden und später durch neue Hilfsmittel bedeutend gefördert worden sind, so werden doch Bauschinger's Leistungen auf diesem Gebiete stets ihren Werth behalten.

Sein der Anwendung der Wissenschaft schon früh besonders zugeneigter Geist beschäftigte sich ausserdem mit Vorliebe mit der theoretischen und angewandten Mechanik, aus welchen Studien sein vortreffliches, nach Delaunay's Buch frei bearbeitetes, in zwei Auflagen (1861 und 1866) erschienenes Werk: „Schule der Mechanik“ entstand. In diese Zeit (1867 und 1868) gehören auch seine Versuche mit dem zur Feststellung der Leistung von Dampfmaschinen dienenden Richards'schen Indikator, welche für die Wissenschaft besonders werthvoll geworden sind; dabei wurden acht Lokomotiven, vier mit Stephenson- und vier mit Meyer-Steuerung auf zahlreichen Fahrten untersucht und auf sieben Bahnstrecken mit 63 Meilen Gesammtlänge und mit Höheunterschieden bis zu 300 Metern 500 Diagramme aufgenommen.

Diese theilweise auch die Nacht über währenden mit ungewöhnlich grosser Mühe und Anstrengung verbundenen Versuche hielt Bauschinger für seine beste Leistung und that sich auf sie immer am meisten zu Gute.

Vor der Einrichtung des Laboratoriums erfolgte seine Bearbeitung der „Elemente der graphischen Statik“, von welcher zwei Auflagen (1871 und 1880) erschienen sind. Der Zweck des Buches war, auf die Culmann'schen Arbeiten in einfacher gemeinverständlicher Art vorzubereiten, was dem Autor auch völlig gelungen ist.

Seine hauptsächlichste und ganz eigenartige Wirksamkeit, die seinen Namen erst weiterhin bekannt gemacht hat, entfaltete aber Bauschinger durch die im mechanisch-technischen Laboratorium gemachten, wahrhaft klassischen Versuche, welche, im Jahre 1871 begonnen, nicht nur der Praxis eine Menge werthvoller Thatsachen brachte, sondern auch der Wissenschaft zu Gute kamen.

Es wurden während 22 Jahren alle Baumaterialien auf ihre Festigkeit und Elastizität geprüft: Eisen und Stahl, Holz, Steine, Cemente und Mörtel.

Er hat zu diesen Bestimmungen die genauesten und sinnreichsten Messapparate und Methoden angewendet und zum Theil selbst erfunden, wie sie zu ähnlichen Zwecken für die physikalische Forschung gebraucht werden, so dass die erhaltenen Resultate für die Physik nicht minder werthvoll sind wie für die Kenntniss der in der Technik verwendeten Materialien. So hat er z. B. durch Einführung der Gauss'schen Methode der Spiegelablesung die Messung der Dehnung ausserordentlich verfeinert und die elastischen Formänderungen der schwersten Maschinentheile oder der stärksten Brückenglieder der Wahrnehmung zugänglich gemacht; hundertstel Millimeter wurden von ihm gemessen mittelst seiner Rollenfühlhebel, durch welche die Relativbewegungen der beobachteten

Punkte durch Reibung einer Stange auf das Zeigerwerk übertragen werden.

Auf diese Weise entstanden die Zug-, Druck-, Biegungs- und Torsions-Versuche Bauschinger's, seine Versuche über die Abnützbarkeit und die Frostbeständigkeit der Gesteine, und die über die Knickfestigkeit und die Widerstandsfähigkeit von Säulen im Feuer. Zuletzt (von 1881 an) machte er die wichtigen Dauerversuche mit oft wiederholter Beanspruchung des nämlichen Körpers, wodurch die Veränderungen der Eigenschaften des Materials durch längeren Gebrauch ersichtlich wurden. Seine Apparate sind auch angewendet worden, um die Festigkeit der Knochen des menschlichen Körpers zu prüfen, was für die Mechanik der Bewegungen desselben sowie für die Chirurgie von Bedeutung geworden ist.

Die Versuche sind zumeist in den 23 Heften der Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium veröffentlicht worden; dieselben bilden eine Fundstätte für den wissenschaftlich gebildeten Techniker und haben vielfache Anregungen gebracht, welche noch auf lange Zeit richtunggebend sein werden. Das Institut Bauschinger's stand an der Spitze der Unternehmungen der Art und es flossen ihm von allen Seiten Materialien zur Untersuchung und Aufträge für die Praxis zu. Ein besonderes Verdienst erwarb er sich noch durch die Gründung der so ungemein nützlich gewordenen „Konferenzen zur Vereinbarung einheitlicher Methoden für die Prüfung von Bau- und Konstruktionsmaterialien“; als Vorstand derselben wusste er mit grossem Geschick die Verhandlungen zu leiten, die vielfachen Gegensätze auszugleichen und die gemeinsamen Versuche nach bestimmten, meist von ihm geschaffenen Methoden zu veranlassen.

Es ist schon betont worden, dass Bauschinger's Zerreissungsversuche nicht allein für die Praxis, sondern auch für die Wissenschaft von Wichtigkeit geworden sind, da sie Aufschluss über das Verhalten der festen Körper in der

Nähe der Elastizitätsgrenze und bei Ueberschreitung derselben geben. Eine rationelle Elastizitätstheorie muss aber das Verhalten der Körper von den kleinsten bis zu den grösstmöglichen Deformationen berücksichtigen.

Als Forscher war Bauschinger von grossem Scharfsinn in der Beobachtung der Erscheinungen und im Ausdenken der richtigen Versuche, von unermüdlicher Ausdauer und seltener Gewissenhaftigkeit. Diese Gewissenhaftigkeit war ihm auch als Lehrer eigen; er lehrte gerne: sein Vortrag war durchdacht und von durchsichtiger Klarheit. Der Mann, welcher sich durch seine wissenschaftlichen Arbeiten so hoch in den Reihen der Gelehrten erhoben hatte, hätte wohl auch den Titel eines Doktors verdient.

Durch eigene Tüchtigkeit aus den einfachsten Verhältnissen hervorgewachsen, blieb er sein Leben hindurch schlicht und bescheiden. Er drängte sich nicht vor, sondern liess die Leute an sich herankommen; dann aber war er ungemein freundlich und wohlwollend und gerne bereit, Jedem zu nützen und zu helfen. Seine unverbrüchliche Wahrheitsliebe liess ihn stets offen seine Meinung sagen, so dass manchmal sein Wesen etwas schroff erscheinen konnte. In der Arbeit und in der Erfüllung der Pflicht suchte und fand er die höchste Befriedigung.

Bauschinger ist in seiner Art für die technische Hochschule und die Wissenschaft kaum zu ersetzen; sein Name wird als der eines sehr verdienten, seine eigenen Wege einschlagenden Forschers noch lange fortleben.

Adolf Steinheil.

Dr. Adolf Steinheil, Inhaber der optisch-astronomischen Werkstätte Carl August Steinheil Söhne, ist am 4. November 1893 aus dem Leben geschieden. Es ist von besonderem Interesse, den Entwicklungs- und Lebensgang dieses so überaus thätigen und eigenartigen Gelehrten zu verfolgen.

Er wurde am 12. April 1832 als der zweite Sohn unseres berühmten Mitgliedes Carl August v. Steinheil dahier geboren. Dieser Sohn hatte das ungewöhnliche Talent des Vaters für Mathematik sowie für die Anwendung derselben zur Lösung physikalischer Probleme geerbt. Die Beiden waren sich überhaupt in ihren Anlagen ungemein ähnlich und bieten ein vortreffliches Beispiel dafür, wie sich die Organisation und die Ausbildungsfähigkeit bestimmter Theile des Gehirns zu vererben vermag. Denn schon im kindlichen Alter trat bei dem Sohne das Verständniss für Zahlenverhältnisse und die entschiedene Vorliebe dafür hervor. Es wird erzählt, er habe als fünfjähriger Knabe vor dem Eintritte in die Volksschule bei Betrachtung seiner gewürfelten Bettdecke sich klar gemacht, dass 2×6 und 3×4 die gleiche Zahl geben. In dem Gymnasium übertraf er die Mitschüler weit in dem Verständniss für Arithmetik und Mathematik und bei den mathematischen Aufgaben erfand er Lösungen, welche von dem Lehrer nicht vorgetragen worden waren. Dem entsprechend hatte er auch zeitlebens das treueste Gedächtniss für Zahlen: so z. B. wusste er von jeder Pflanze zu sagen, auf welcher Seite von Koch's Deutscher Flora sie sich beschrieben findet, und konnte er eine grosse Anzahl von Logarithmen aus dem Kopfe angeben.

Es ist verständlich, dass der so veranlagte Sohn sich zu dem gleich gearteten Vater besonders hingezogen fühlte und schon früh für dessen Thun das lebhafteste Interesse empfand.

Man muss die Besonderheit des Vaters gekannt haben, um die Stellung des Sohnes zu ihm zu verstehen. Der Vater war ein selten genial angelegter Mann, unablässig geistig beschäftiget und voll von Ideen; er verband mit der Gründlichkeit und Schärfe des Gelehrten den beweglichen Geist, den sicheren Blick und die Beherrschung der Technik des ausgezeichneten Praktikers. Ein Schüler von Bessel und

Gauss, die ihn, wie ihr Briefwechsel darthut, besonders hoch hielten, hatte er von diesen Geistesheroen gelernt, die Mathematik als Mittel zum Zweck anzusehen. Man nennt ihn wohl gewöhnlich als den Begründer der jetzt die ganze Erde umspannenden Telegraphen, welche er durch seine Erfindungen praktisch möglich gemacht hat. Zu diesen gehören: die Art des Aufschreibens und die Wahl der Zeichen, dann die Benützung der leitenden Erde statt des zweiten Drahtes und die Ableitung des Blitzes von den Apparaten durch die Blitzplatten, ferner der sogenannte schweizerische Commutator und die Translatoren, durch welche eine an einer Station anlangende Depesche sich selbst weiter telegraphirt. Aber man vergisst häufig, dass in vielen anderen Fällen, wo es galt eine schwierige physikalische Aufgabe durchzuführen, sein Geist alsbald die Mittel dazu fand.[1]) Wer das Glück

1) Es sei nur erinnert: an sein Photometer zur Bestimmung der relativen Helligkeiten der Sterne; an das zur Sendung optischer Zeichen in grosse Entfernungen bestimmte Heliotrop; an die erste Verwendung physikalischer Eigenschaften z. B. der Brechbarkeit und der Zerstreuung des Lichtes, des specifischen Gewichtes etc. etc. zur quantitativen chemischen Analyse; an die Herstellung genauer Maassstäbe, Gewichte und Waagen; an seinen Astrographen zum Zeichnen der Sternkarten; an das Pyroskop zur sicheren Ermittelung von Brandstätten bei Nacht; an seine Angabe durch einen mit einer elektrischen Batterie in Verbindung gebrachten Draht kranke Theile rasch abzubrennen als erstes Beispiel der für die Chirurgie so wichtig gewordenen Galvanokaustik; an die Vorrichtung, um bei der Richtung des astronomischen Fernrohrs auf den Quecksilberhorizont das Spiegelbild des Fadenkreuzes sichtbar zu machen, wobei er eine Aufgabe, welche optisch derjenigen des viel jüngeren Augenspiegels ganz nahe verwandt ist, mit völlig ähnlichen Mitteln löste; an den für die berühmten spectralanalytischen Versuche von Bunsen und Kirchhoff von ihm construirten Spectralapparat, und endlich an die mit Kobell vor Daguerre gemachte erste Fixirung von Lichtbildern auf Papier, welche als erste Photographien auf Papier noch auf der letzten Nürnberger Ausstellung zu sehen waren. Wahrlich eine reiche Anzahl der wichtigsten, noch jetzt fortwirkenden Leistungen, wie sie nicht leicht ein Gelehrter aufzuweisen vermag.

hatte, diesem merkwürdigen Manne näher zu treten, der wird die Stunden, die er in seinem Umgange zubrachte, nie vergessen. So wenig bestechend sein Vortrag war, so war er doch im Umgang ein ungemein anregender Lehrer für reifere Schüler, bei denen er durch den Reichthum und die Originalität der Gedanken das grösste Interesse für seine Wissenschaft zu erwecken wusste.

So kam es auch, dass der Sohn zeitlebens zu dem Vater, welcher für ihn das Ideal eines Naturforschers war, voll Verehrung aufsah und in Pietät das that, was der Vater forderte, wenn ihm auch die Erfüllung nicht selten recht schwer geworden ist.

Denn der Vater hielt strenge Zucht in seinem Hause, verlangte unbedingten Gehorsam und pünktlichste Ausführung seiner Anordnungen. Er war jedoch durchaus kein finsterer Mann von pedantischem grübelndem Wesen, sondern vielmehr gerne heiterem Leben zugewandt, an dem er auch seine Kinder Theil nehmen liess.

Besondere Anschauungen hatte der Vater sich über die Erziehung gebildet; der gewöhnliche Bildungsgang durch das Gymnasium und die Universität sagte diesem unabhängigen Geiste nicht zu und er wünschte nicht, dass seine Söhne in den Staatsdienst giengen: sie sollten sich ganz durch eigene Kraft durch das Leben durchringen. Er beachtete bei der genialen Leichtigkeit seines Arbeitens nicht, dass nur besonders veranlagte Naturen dies vermögen und der Mittelmässige am sichersten den gewöhnlichen Weg einschlägt.

Durch diesen Widerstand entschloss sich der junge Steinheil, die Nothwendigkeit akademischer Studien erkennend, nach Absolvirung der zweiten Gymnasialklasse Privatstunden im Lateinischen und Griechischen zu nehmen, wozu er sich die vom Vater verweigerten Mittel durch Stundengeben in der Mathematik erwarb, so dass er schon nach einem Jahre (1849) am Gymnasium zu St. Anna in

Augsburg das Absolutorium bestand. Er hörte darnach während eines Jahres (1849/50) als Eleve des ersten Kurses Vorlesungen über Mathematik und Physik an der früheren hiesigen polytechnischen Schule, die ihm jedoch keinen besonderen Gewinn brachten, und gieng dann mit seinen Eltern (1850) nach Wien, wohin der Vater als Sektionsrath in das Ministerium berufen worden war, um in Oesterreich die elektrischen Telegraphen einzurichten. In Wien besuchte er während des Jahres 1850/51 an der Universität und der polytechnischen Schule mathematische, chemische und botanische Vorlesungen bei Moth, Petzval, Schrötter und Unger, und lernte auch hervorragende Naturforscher im elterlichen Hause näher kennen, was für ihn von nachhaltiger Bedeutung war.

Aber bald riss ihn der Wille des Vaters aus diesen regelmässigen Studien heraus; er bestimmte ihn (1851) den Lehrkurs und die Prüfung zur theoretisch-praktischen Heranbildung von Staatstelegraphisten mitzumachen, liess ihn zum Aushilfstelegraphisten mit einem Taggeld von 1 fl. ernennen und beauftragte ihn mit der Herstellung der Telegraphenlinien in der Lombardei. Es war dies eine schlimme Zeit für den jungen wissensdurstigen Mann, eine Zeit voller Anstrengungen und Entbehrungen, denn er musste mit seinen italienischen Arbeitern, mit denen er die harte Arbeit und die ärmliche Kost theilte, die Träger aufrichten und die Drähte ziehen. Nach Lösung dieser Aufgabe schwer krank nach Wien zurückgekehrt, fand er keine Ruhe, denn der Vater hatte die Herstellung des Telegraphennetzes in der Schweiz übernommen und die Einrichtung der Büreaux und die Ueberwachung der Legung der Leitungen sowie die Ausbildung der Obertelegraphisten dem noch nicht zwanzigjährigen Sohne in selbständiger Stellung vorbehalten. Es war eine schwierige, aber dankbare Aufgabe, welche ihm hier zuviel; man erkannte in der Schweiz die Wichtigkeit

der Sache und interessirte sich in allen Kreisen lebhaft dafür; bald hatte sich auch der junge zum Oberinspektor ernannte Mann durch seine Kenntnisse und Energie die lebhafteste Anerkennung der Behörden und des Publikums erworben. Seine Schüler bei den in deutscher und französischer Sprache abgehaltenen Lehrkursen waren älter als er; aber sie haben ihn alle hoch geachtet, wie aus den mit ihm noch später unterhaltenen Beziehungen hervorgeht, und auch er hat sich stets mit Freude und Genugthuung dieser Zeit erfreulicher Wirksamkeit (Februar bis Oktober 1852) erinnert.

Es hätte sich ja wohl daran eine bleibende Stellung anknüpfen lassen, aber es sollte die Aufgabe seines Lebens eine ganz andere werden. Im Herbst 1852 von der Schweiz nach München zurückgekommen, wo der Vater wieder Anstellung gefunden hatte, hörte er an der Universität im Winter- und Sommersemester historische und philologische Vorlesungen, besonders aber die Experimentalphysik bei Simon Ohm, um sich für die Doktorprüfung vorzubereiten. Er war aber auch zu gleicher Zeit Hospitant des Ingenieurkurses an der polytechnischen Schule, wodurch er befähiget wurde, schon im Sommer 1853 das Absolutorium dieser Schule zu erlangen und im Herbst desselben Jahres die theoretische Prüfung für den Staatsbaudienst als Ingenieur zu bestehen. Er glaubte dadurch einen Rückhalt für alle Fälle zu haben. Seit dieser Zeit hatte er in seinem damaligen verehrten Lehrer Bauernfeind einen väterlichen Freund erworben.

Mittlerweile hatte der Vater praktisch-optische Arbeiten begonnen, um die Mittel zum Lebensunterhalte für seine Familie zu verdienen. Er war dazu besonders geschickt, nicht nur durch die frühere Erfindung optischer Instrumente, sondern auch durch deren vortreffliche Ausführung in seiner Werkstätte bei der mathematisch-physikalischen Sammlung der Akademie; er hatte auch in seiner Jugend Fraunhofer's Arbeiten verfolgt und war sogar von diesem aufgefordert

worden als Theilnehmer in sein Institut einzutreten, was er bescheiden abgelehnt hatte. König Maximilian II. ermunterte ihn zu seinem neuen Unternehmen, indem er ihm den Wunsch aussprach, es möchte München als der Vorort für die praktische Optik in Deutschland, der es durch Fraunhofer geworden war, erhalten bleiben. Nach einigen Vorarbeiten konnte im Mai 1855 die optisch-astronomische Werkstätte in Schwabing bei München eröffnet und der erste Prospekt ausgegeben werden. Der Sohn wurde der erste und beste Mitarbeiter bei derselben. Nur mit Mühe und unter Widerstreben des Vaters vermochte er noch die Zeit zu gewinnen, das Doktorexamen zu machen, welches er im Jahre 1855 unter dem Dekanate Liebig's, der mit Scharfblick sein Talent erkannte und ihm stets gewogen blieb, mit der Dissertation: „Tafeln zur Entnehmung der Radien von Fernrohrobjectiven, deren innere Flächen in einander passen" bestand.

Von da an blieb er ganz bei der Optik, welche sein Lebensberuf werden sollte. Er wurde durch den Vater in dessen Ideen und Entwürfe eingeweiht und hatte die Aufgabe dieselben durchzuführen. Es war ihm namentlich die Berechnung des Ganges der Lichtstrahlen durch die Linsen und das Suchen nach den besten Formen übertragen. Es begann damit für ihn eine Zeit rastlosester Thätigkeit, ein Schaffen ohne Gleichen; Jahrelang hat er, ohne sich eine Erholung gewähren zu dürfen, täglich zwölf Stunden gerechnet; dadurch aber eine so grosse Erfahrung und so eingehende Kenntnisse erlangt, wie sie in diesem Zweige des Wissens wohl noch Niemand gehabt hat. Dieser geistige Erwerb bildete die sichere Grundlage für seine späteren Leistungen; eine kurze Rechnung belehrte ihn später, ob der eingeschlagene Weg zum Ziele führt, und ein Blick in die Rechnungen, ob und welche Fehler die Rechner gemacht hatten. Jene ersten Jahre des Betriebs der Werkstätte waren Steinheils eigentliche Lehrjahre; er fühlte, dass er jetzt in

seinem Elemente sich befinde und befähiget sei, hierin das Beste zu vollbringen.

Im Jahre 1865 zog sich der Vater, welcher eine Sache nur so weit verfolgte, als er glaubte, schöpferisch wirken zu können, von dem optischen Institute zurück, um ausser Problemen der Wissenschaft seinen Neigungen, der Malerei und der Musik, sich hinzugeben. In Folge davon war der Sohn von da an ganz auf seine eigene Kraft angewiesen; er kaufte dem Vater das Geschäft ab, und führte es anfangs mit seinem älteren Bruder Eduard[1]), welcher im Wesentlichen den technischen und kaufmännischen Theil übernommen hatte, später nach dessen Tode allein fort. Und welchen Aufschwung nahm das Institut in kurzer Zeit unter seiner sachkundigen Leitung!

Von Anfang an gieng sein Bestreben dahin, alles Empirische zu verbannen und auf rein wissenschaftliche Weise durch strenge trigonometrische Rechnung, nachdem die optischen Constanten der Glassorten bestimmt waren, die besten Formen zu ermitteln und diese dann mit den feinsten von seinem Vater verbesserten Methoden der Prüfung mittelst des Sphärometers, des Fühlspiegels und der Newton'schen Farbenringe auf das Genaueste auszuführen. Solchen Proben auf die Güte unterlagen auch die Glasarten und die fertigen Instrumente. Es ist ihm dadurch gelungen, eine Anzahl der wichtigsten Neuerungen in die Optik einzuführen.

Steinheil ist in seinen optischen Untersuchungen der direkte Nachfolger Fraunhofer's geworden; er hat da ange-

---

1) Dieser Bruder Eduard, welcher sich ursprünglich für die Maschinenkunde, dann für die Landwirthschaft ausgebildet hatte, war ebenfalls für die Naturwissenschaft begeistert; er war eine Autorität in der Entomologie und besass eine unwiderstehliche Lust ferne Welttheile zu sehen. Er hatte die Insel Elba, Algier und Columbien kennen gelernt; auf seiner zweiten Reise nach Columbien erlag der talentvolle Mann auf der Insel St. Thomas dem Sonnenstich.

schlossen, wo letzterer durch einen allzu frühen Tod die Arbeit abbrechen musste. Stets hat er jedoch dankbarst anerkannt, welche Förderung ihm durch die hervorragenden theoretischen dioptrischen Arbeiten unseres verehrten Mitgliedes Seidel geworden ist.

Fraunhofer hatte durch Verwendung der von ihm im Sonnenspektrum entdeckten fixen Linien eine strenge Rechnung in der Optik ermöglicht; er war dadurch in den Stand gesetzt worden, die Lichtstrahlen durch trigonometrische Rechnung durch ein Linsensystem zu verfolgen, den Einfluss der Halbmesser, der Dicken und der Abstände der Linsen auf die Vereinigungsweiten verschiedener Strahlen zu bestimmen und so die Dimensionen festzustellen, welche für gegebene Glasarten ein möglichst deutliches Bild eines in der Axe gelegenen leuchtenden Punktes ergeben.

Fraunhofer's Fernrohrobjektive mit kleineren Dimensionen erfüllten drei Bedingungen: sie hatten eine bestimmte Brennweite bei gleichzeitiger Hebung des Kugelgestalt- und Farbenfehlers. Bei seinen Fernrohrobjektiven von grösseren Dimensionen kam noch die Wahl der Glassorten in Bezug auf das nach Vereinigung der Hauptfarben noch bleibende sogenannte sekundäre Spektrum hinzu, sowie die von ihm angestrebte Erfüllung einer vierten Bedingung, welche aber trotz eifriger Untersuchungen des berühmten Fernrohrs noch nicht mit Sicherheit festgestellt werden konnte. Alles dieses hatte Fraunhofer durch Anwendung von nur zwei Linsen erreicht und dadurch zuerst bewiesen, dass die Wissenschaft eine zuverlässigere Führerin ist als die Empirie, um unter vielen Möglichkeiten die günstigste Form zu wählen.

Steinheil's erste Aufgabe war, in der Construktion der Fernrohre womöglich über Fraunhofer hinaus zu kommen. Er studirte eingehend das Objektiv desselben und berechnete dann (1861) das von Gauss, dessen Oeffnung im Verhältniss zur Brennweite eine grosse ist, wodurch die Helligkeit be-

trächtlicher als bei dem ersteren Fernrohr wird. Es gelang Steinheil in dieser Beziehung (Grösse des Oeffnungswinkels) noch das von Gauss Geleistete zu übertreffen. Ferner erkannte er es als einen wesentlichen Vortheil, wenn die dauerhaftere Flintglaslinse der aus Crownglas vorausgestellt werde; das Objektiv erhält dadurch stärker gekrümmte Flächen, wodurch das Bild ausser der Axe genauer wird und die unvermeidlichen Reflexbilder weiter vom Objektivbild entfernt werden, so dass sie nicht so störend wirken. Da aber bei den Fernrohren im Wesentlichen nur das Bild in der Axe deutlich zu sein braucht, und das Fraunhofer'sche die dafür nöthigen drei Bedingungen erfüllt, so ist letzteres auf einem so hohen Grad der Vollkommenheit angelangt, dass man es kaum zu überbieten vermag.

Eine ganz neue Form führte dann Steinheil durch die Mikrometerokulare und die vorzüglichen aplanatischen Lupen ein. Früher hatte man bekanntlich als Lupen zumeist nur einfache chromatische Linsen mit ganz geringem Gesichtsfelde und als Okulare nur getrennt stehende einzelne Linsen, welche ebenfalls chromatisch waren und vielfach störende Reflexe zeigten, verwendet. Steinheil setzte die beiden aus drei mit einander verkitteten Linsen, einer biconvexen Crownglaslinse zwischen zwei Flintglaslinsen, zusammen, wodurch er achromatische, von Reflexen freie Bilder erhielt. Seine eigenthümlichen monocentrischen Okulare bestehen ebenfalls aus einer Kugel von Crownglas, welche von zwei Flintglasmenisken eingeschlossen ist, deren Radien sich nur durch die Dicke unterscheiden, so dass alle Radien den gleichen Mittelpunkt haben, der zugleich optischer Mittelpunkt ist; sie zeigen grosse Bildschärfe in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt des Gesichtsfelds und haben mannigfache Anwendung z. B. bei Ringmikrometern gefunden.

Die grösste Aufgabe erwartete Steinheil jedoch durch die Photographenobjektive. Die sich so rasch entwickelnde

Photographie stellte nämlich an die Optik eine Reihe anderer Anforderungen, viel schwierigere als es bis dahin die Astronomie gethan hatte. Auf diesem Felde konnte Steinheil's Methode der Rechnung und der Herstellung der Objektive die bedeutendsten Erfolge erringen. Bei dem astronomischen Fernrohr wird nämlich von dem durch das Objektiv entworfenen Bild gewöhnlich nur ein kleiner centraler Theil durch das Okular betrachtet, wesshalb das Fernrohrobjektiv, wie erwähnt, zumeist nur in der Axe und deren nächster Nähe ein scharfes Bild zu liefern braucht, während es gleichgiltig ist, ob dieses Bild in seiner weiteren Ausdehnung scharf bleibt, d. h. ob es eben oder gekrümmt ist. Bei der Photographie dagegen soll das vom Objektiv entworfene Bild eine grosse Ausdehnung besitzen und in der ganzen Ausdehnung gleich genau sein, es soll ferner vollkommen in einer Ebene liegen und eine grosse Tiefe besitzen, welches letztere dann erreicht ist, wenn die Linse die Fähigkeit hat, von ungleich entfernten Objekten gleichzeitig ein deutliches Bild in der nämlichen Ebene zu erzeugen.

Dabei genügt es nicht wie bei dem Fernrohr nur die Strahlen in der Axe in einem Punkte zu vereinigen, da das Bild eines ausser der Axe liegenden leuchtenden Punktes einen zu grossen Durchmesser erhalten kann; man muss daher in diesem Falle die trigonometrische Durchrechnung auch noch auf einen Bildpunkt ausser der Axe ausdehnen, wodurch die Aufgabe eine viel complizirtere wird. Man hat hier nach den Darlegungen Steinheil's zu berücksichtigen: bei dem Bildpunkt in der Axe: die Brennweite, die Hebung des Kugelgestaltfehlers und des Farbenfehlers; bei dem Bildpunkt ausser der Axe: die Hebung der Farben ausser der Axe, dann der Verzerrung, der Bildkrümmung, des regelmässigen und unregelmässigen Astigmatismus und des Kugelgestaltfehlers ausser der Axe. Die Correktur der drei letzteren Fehler wurde ihm nur durch die von Seidel entwickelten

„trigonometrischen Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an centrirten sphärischen Flächen“ möglich. Fraunhofer hatte schon, wie gesagt, bei seinen Fernrohrobjektiven von grösseren Dimensionen ausser den drei Bedingungen für den Bildpunkt in der Axe eine vierte einzuführen gesucht.

Bevor sich Steinheil mit der Construktion photographischer Objektive befasste, existirte nur ein einziger guter Typus, der von dem Mathematiker Petzval in Wien bald nach Erfindung der Daguerreotypie ersonnene; er war aus vier Linsen zusammengesetzt, von denen drei einzeln stehen, und aus drei Glasarten hergestellt. Dieses Petzval'sche Objektiv ist noch immer im Gebrauch, alle anderen, wesentlich neuen Photographenobjektive sind von Steinheil eingeführt worden. Hierin zeigt sich seine vollkommene, einzig dastehende Beherrschung der Theorie am prägnantesten.

Im Laufe der Zeit sind von ihm drei Constructionstypen für Photographen-Apparate ausgegeben worden.

Zuerst das Periskop (1865), welches nur aus zwei symmetrischen Linsen von einer Glasart besteht, also chromatisch und von geringer Helligkeit ist, jedoch ein sehr grosses Gesichtsfeld und eine ganz correkte Zeichnung besitzt. Dieses Instrument wird noch heute trotz seiner Farbenzerstreuung gewünscht, da es in Folge der ausserordentlich einfachen Construktion für seine Leistung sehr billig ist.

Den zweiten Typus nannte er Aplanat, welcher aus vier paarweise verkitteten symmetrischen Linsen von zwei Glasarten besteht. Im Jahre 1866 wurden die ersten Apparate der Art vollendet, im Jahre 1871 die Weitwinkelapparate für Reproduktion von topographischen Landkarten als Lösung einer von dem österreichischen Kriegsministerium gestellten Aufgabe ausgeführt, und im Jahre 1879 die ersten Gruppenaplanate ausgegeben. Diese Aplanaten haben die weiteste Verbreitung gefunden und wurden überall unter den ver-

schiedensten Namen nachgemacht. In ihnen finden sich die Elemente für alle Bedingungen; nur eines dieser Elemente, der Astigmatismus, ist darin noch nicht berücksichtiget.

Der dritte Typus ist der im Jahre 1881 entstandene Antiplanet. Derselbe beruht auf einem ganz neuen, höchst geistreich erdachten Prinzip, indem durch eine vordere Doppellinse alle Fehler absichtlich gross gemacht und dann durch ein zweites Linsenpaar vollständiger, als dies sonst möglich war, korrigirt werden. Er besteht aus nur vier paarweise verkitteten nicht symmetrischen Linsen von nur zwei Glasarten, und es ist in ihm auch der letzte Fehler, der des Astigmatismus, fast ganz gehoben. Dieser Antiplanet, ein Instrument von denkbar grösster Einfachheit, erforderte unendlich mühsame Berechnungen, bis die Möglichkeit der Anwendung des Prinzips erkannt war, er hat aber auch zu einem glänzenden Resultat geführt. In Folge der in dem letzten Jahrzehnt in der Glastechnik gemachten grossen Fortschritte haben Andere versucht, diesen Steinheil'schen Antiplanet noch zu verbessern.

Von Steinheil wurde die von dem deutschen Reiche zur Beobachtung des Venusdurchgangs im Jahre 1874 ausgesandte Expedition mit vortrefflichen photographischen Fernrohrobjektiven ausgestattet.

Zuletzt fesselte ihn die wichtige Aufgabe der Herstellung von Instrumenten zur Photographie der Himmelskörper. Bei den Pariser Verhandlungen, welche die einheitliche photographische Aufnahme des Fixsternhimmels vorzubereiten hatten, vermochte er darzuthun, welchen Bedingungen ein astrophotographisches Objektiv zu genügen hat, woraufhin er zunächst das Potsdamer Observatorium mit Apparaten der Art versorgte, welche schon manche neue Aufschlüsse geliefert haben.

Steinheil's astrophotographische Objektive bedingen einen erheblichen Fortschritt in der Wissenschaft, mit dem sein

Name stets verknüpft bleiben wird, denn sie gestatten die Stellung der Sterne noch nach Jahrhunderten zu ersehen und die Veränderungen derselben zu erkennen. Die hiesige Sternwarte, welche überhaupt kein grösseres Instrument von Steinheil besitzt, ist wegen Mangel von Mitteln leider nicht in der Lage, sich an diesem durch unseren Mitbürger ermöglichten geistigen Wettkampfe zu betheiligen.

Die Hauptschwierigkeiten bei der Berechnung optischer Construktionen liegen darin, für den jeweiligen Fall die richtige Reihenfolge zu finden, in welcher alle die nothwendigen Bedingungen erfüllt werden müssen, und direkt vergleichbare Fälle für die Auswahl herzustellen, sowie auch die in Bezug auf ihr Brechungs- und Zerstreuungsvermögen passenden Glasarten zu wählen. Steinheil liess nie ab, immer wieder zu prüfen, ob sich der Zweck nicht vollständiger und mit einfacheren Mitteln erreichen lasse. Er besass ausserdem ein ganz besonderes Geschick in der Erfindung von Methoden, nach welchen genaue Formen hergestellt werden können, ohne vom Arbeiter besondere Kenntnisse zu verlangen, wobei er zumeist von aus der Mathematik bekannten Sätzen ausgieng. Um z. B. eine genaue Planfläche herzustellen, liess er, ganz unabhängig von Withworth und Anderen, drei Flächen schleifen, von welchen jede auf jede der beiden anderen passt, denn in diesem Falle mussten auch die Flächen eben sein. War ihm ferner die Aufgabe gestellt, ein Prisma zu machen mit einem Winkel von genau 90° und zwei Winkeln von genau 45°, so gieng er von den beiden geometrischen Sätzen aus, dass im Quadrat jeder Winkel ein rechter ist und dass im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck die Winkel an der Hypothenuse einander gleich und von 45° sind.

Aus der optisch-astronomischen Werkstätte Steinheil's, welche im Jahre 1862 aus Schwabing nach München in die Landwehrstrasse verlegt und im Jahre 1890 in ein eigens

für diesen Zweck auf der Theresienhöhe errichtetes grosses Gebäude transferirt wurde, sind Tausende von kleinen und grossen Fernrohren, Prismen, Photographenapparaten etc. in alle Welttheile ausgegangen und haben seinen Namen als den eines der erfindungsreichsten und sorgfältigsten Optiker aller Zeiten bekannt gemacht. Seine Kenntnisse und seine Energie haben das berühmte Institut geschaffen; sein Geist wird in letzterem noch ferner walten. Die in seine Fussstapfen Tretenden haben jetzt leichtere Mühe das von ihm Erdachte weiter fortzuführen.

Steinheil hat durch seine optischen Untersuchungen und die Herstellung optischer Instrumente nicht nur indirekt die Wissenschaft gefördert, sondern sich auch direkt an der Erweiterung derselben betheiligt. In manchen exklusiven Kreisen der Gelehrten sieht man zwar noch immer nur die ganz ideale, auf keinen praktischen Nutzen gerichtete Thätigkeit als die wissenschaftliche an und hält eine Beschäftigung um so weniger für eigentlich wissenschaftlich und für würdig, je mehr sie einer direkten Anwendung fähig ist. Aber hören wir denn nicht so oft sagen, dass jede durch die Wissenschaft festgestellte Thatsache, auch die allerabstrakteste, einmal ihre Bedeutung für das menschliche Leben gewinnt, eine Bedeutung, welche zumeist Niemand vorzuahnen im Stande ist? Und soll es für den Forscher einen Unterschied machen, ob dieser Nutzen erst nach Hunderten von Jahren oder alsbald sich einstellt? Der Entdecker neuer Gebiete und Thatsachen in der Wissenschaft erkennt nicht selten bei einem gewissen Stande des Wissens auch zuerst deren Anwendbarkeit und findet wohl auch am besten den richtigen Weg dazu. In solcher Weise wurde Lavoisier der erste praktische Hygieniker, denn er hat sich nach der Erkenntniss der Rolle des Sauerstoffs im Thierkörper viel mit der Beschaffung reiner Luft und mit anderen Fragen der öffentlichen Gesundheitspflege befasst. Gerade unsere Aka-

demie bietet in ihrer Vergangenheit leuchtende Beispiele dafür, dass die grössten Gelehrten es nicht verschmäht haben, die Früchte ihrer wissenschaftlichen Arbeit zum Wohle der Menschheit zu verwerthen. Liebig wurde auf Grund seiner chemischen Untersuchungen der Begründer des rationellen Ackerbaues; der edle Fraunhofer, gegen dessen Aufnahme in die Akademie als eines Autodidakten und Praktikers von mancher Seite Bedenken bestanden, stellte in seinem optischen Institut die ersten genauen achromatischen Fernrohre her, mit denen er, wie die von Utzschneider ihm gesetzte stolze Grabschrift aussagt: approximavit sidera; es ist schon erwähnt worden, wie der geistvolle Steinheil, der Aeltere, zuerst die Apparate für die elektrische Telegraphie brauchbar zu gestalten wusste, wodurch er der Kultur einen der grössten Dienste erwies. Sollen dies Alles wirklich keine wissenschaftlichen Werke gewesen sein? In der That, seitdem auf vielen Gebieten die Praxis nicht mehr eine Empirie ist, sondern nichts Anderes als Wissenschaft, ist hierin die Grenze zwischen Theorie und Praxis nicht mehr zu bestimmen. Den Entscheid, ob eine Leistung eine wissenschaftliche ist oder nicht, liefert nur die dabei benützte Methode. Häufig gehört auch zur Herstellung nutzbarer Dinge auf wissenschaftlichem Wege mehr Geist und schöpferische Kraft als zu einer rein wissenschaftlichen Thätigkeit auf schon längst gebahnten Wegen. Und dass Steinheil bei seinen Arbeiten nach streng wissenschaftlicher Methode verfuhr, das weiss Jeder, der sie kennt.

Er hatte auch auf dem Höhepunkt seines Lebens die grosse Freude sich als Mann der Wissenschaft voll anerkannt zu sehen. Unsere Akademie, in welcher sich Männer befinden, die als erste Sachverständige auf dem Gebiete der Optik gelten, hat ihn im Jahre 1888 zum ausserordentlichen Mitgliede gewählt. Bei dem vorher erwähnten internationalen Congresse in Paris (1887), bei welchem die Methoden der

photographischen Aufnahmen des Sternhimmels festgesetzt werden sollten, hat der deutsche Optiker mit Alle überzeugender Klarheit und Sicherheit seine gereiften Anschauungen hierüber dargelegt, denen sich die illustre Versammlung einstimmig anschloss. Als im Jahre 1891 die internationale astronomische Gesellschaft dahier ihre Versammlung abhielt, konnte er den sachkundigen Gelehrten seine neue Werkstätte mit ihren vollendeten Einrichtungen zeigen; Alle haben damals die Ueberzeugung gewonnen, dass sie eine auf wissenschaftlicher Grundlage ruhende Anstalt gesehen haben. Ein Zeichen der Anerkennung seiner Verdienste um die Wissenschaft war es auch, dass er im Jahre 1887 zum Mitgliede des Kuratoriums der physikalischen - technischen Reichsanstalt, deren Vorstand Helmholtz ist, ernannt wurde, wo sein erfahrener unparteiischer Rath gerne gehört wurde.

In seiner Liebe zur Wissenschaft hat er in uneigennützigster Weise Alles zu ihrer Förderung gethan. Wie oft haben sich Astronomen und Physiker, welche zu einem besondern Zweck eines optischen Apparates bedurften, an Steinheil gewendet, der denselben ersann und herstellte, ohne für seine geistige Thätigkeit und besondere Mühe einen Preis in Ansatz zu bringen. Bei Gelegenheit der 100jährigen Geburtstagsfeier Fraunhofer's machte er zu Gunsten der hiesigen technischen Hochschule eine Stiftung von 10000 Mark zur Errichtung einer optischen Prüfungsstation, in welcher von sachkundiger Seite Prüfungen optischer Instrumente vorgenommen werden können; es war sein Wunsch dadurch den wissenschaftlichen Betrieb der Mechanik und Optik in München, wo die Werkstätten von Utzschneider, Fraunhofer, Reichenbach und Ertel blühten und in der Bevölkerung noch so viel Talent für solche Arbeiten sich findet, zu fördern; allerdings scheint von diesem hochherzigen Geschenk in weiteren Kreisen nichts bekannt geworden zu sein. Das gemeinschaftlich mit Ernst Voit herausgegebene verdienst-

volle Handbuch der angewandten Optik, an dem beide Autoren den gleichen Antheil haben, ist ein Hilfsbuch für den ausübenden Optiker, um ihm ein klares Bild von der Leistung optischer Systeme zu verschaffen und ihn in den Stand zu setzen, die Berechnung derselben mit wissenschaftlicher Strenge durchzuführen. Steinheil hat darin alle seine Methoden der Oeffentlichkeit preisgegeben, damit sie Gemeingut und Anderen nutzbar würden und es nicht so gehe, wie mit den leider verloren gegangenen Methoden Fraunhofer's. Wo aber fände sich ein zweiter, der in gleichem Falle so uneigennützig gehandelt hätte?

Durch die frühzeitige intensivste, lange Zeit sein ganzes Denken in Anspruch nehmende Beschäftigung mit einem besonderen Zweige des Wissens, ohne die er nie sein Ziel erreicht hätte, erhielt er scheinbar eine gewisse Einseitigkeit. Er besass jedoch auch für andere Dinge ein lebhaftes Interesse. Mit den einheimischen Pflanzen, Käfern und Schmetterlingen war er, wie sein Vater und Bruder, in seltenem Grade vertraut; er kannte genau ihre Fundorte und Lebensweise, so dass Spaziergänge mit ihm für den Naturfreund zu einem wahren Genusse wurden. Gerne und mit Verständniss folgte er Erörterungen über schwierige, noch nicht aufgeklärte Fragen aus ihm sonst ganz fremden Gebieten und wusste nicht selten den Kernpunkt zu finden und auf den richtigen Weg zu leiten. Der hiesigen Stadt hat er während 12 Jahren (1869—1881) als Gemeindebevollmächtigter namentlich durch seine rechnerischen Kenntnisse und seinen leichten Ueberblick bei Aufstellung des städtischen Haushaltes und auch auf dem Gebiete der Volksschule erspriessliche Dienste geleistet, wobei er sich die intimste Freundschaft des unvergesslichen Bürgermeisters Erhardt erwarb.

Das Bild von Steinheil's Wirken und Wesen wäre unvollständig, wenn man nicht auch seiner Charaktereigenschaften gedenken würde. Bei so Manchem entspricht die

Ausbildung des Charakters nicht der des Geistes; wir vermögen ihn ob letzterer zu bewundern, ihn aber ob ersterer nicht zu lieben. Steinheil ist durch ruhiges und tiefes Nachdenken über sich und die Welt sowie durch sein Handeln darnach zu einem der edelsten Menschen geworden.

Wer ihn nur oberflächlich kennen lernte, bemerkte an ihm eine auffallende, manchmal fast zu gross erscheinende Bescheidenheit. Diese hatte er nicht, weil er seine Person zu niedrig stellte, denn er wusste für sich im Stillen recht wohl, was er werth war; sie entsprang vielmehr einer gewissen Verlegenheit und Unbeholfenheit im Umgang mit Leuten, die ihm noch fremd waren, aber auch der aufrichtigen Hochachtung für jegliches Verdienst. Von einer ungewöhnlichen Milde im Urtheil gegen Andere hat ihn wohl Niemand in aufbrausendem Zorne gesehen; nur dann konnte er indignirt und sogar scharf seine Meinung äussern, wenn er eine Unwahrheit wahrnahm. Es währte darum lange, bis er von einem Menschen Böses dachte, aber es gelang schwer, wenn er einmal aus einem solchen Grunde gegen Jemanden eingenommen war, ihm eine bessere Meinung über ihn beizubringen.

Von einer unendlichen Liebe war er für seine Mitmenschen erfüllt. Von den reichen Mitteln, die er sich durch seinen Fleiss erworben, hat er den edelsten Gebrauch gemacht und unendlich viel Gutes und Segensreiches gestiftet. Vielen Menschen hat er geholfen und in einer Weise, dass sie die Wohlthaten nicht drückend, sondern als eine wahre Herzensfreude des Gebers empfanden. Für jeden seiner vielen Arbeiter war er ein sorgender Freund; sie wussten aber auch, was sie an ihm hatten und suchten es ihm durch treue Anhänglichkeit zu vergelten. Es war ein wahres Wort, was ein auswärtiger Fachgenosse an seinem Grabe aussprach: die soziale Frage wäre wohl bald gelöst, wenn alle Arbeitgeber so dächten und handelten wie Steinheil.

Sein Nachdenken hat ihn auch dazu geführt, die Welt trotz aller ihrer Unvollkommenheit als gut und weise eingerichtet zu betrachten, und er konnte gegen pessimistische Anschauungen lebhaft ankämpfen. Das Schlimme wusste er immer wieder zum Guten auszulegen und sich und Andere zu beruhigen. Das Unvermeidliche und das Unglück betrachtete er als nothwendige Folge der gegebenen Bedingungen, und er war sich klar darüber, dass der Mensch von der Natur nicht ausgenommen sei, sondern einen Theil derselben bilde. In diesem Sinne ertrug er die Abnahme seines Sehvermögens und den Verlust des einen Auges mit wahrhaftem Heldenmuth, während er der Verfeinerung dieses Sinnesorganes für die übrigen Menschen seine ganze geistige Kraft widmete.

Man kann ermessen, was ein Mann von solcher Gesinnung seinen Freunden sein musste. Er war für sie von unwandelbarer Treue, voller Theilnahme im Glück und Unglück, von geradezu rührender Aufmerksamkeit und Aufopferung. Sie allein haben die ganze Fülle von Edelsinn, dessen der nach Aussen hin so anspruchslos erscheinende Mann fähig war, erkennen können.

In einer Zeit, in welcher selbst in der Wissenschaft so Viele nicht mehr mit reinem Sinne ausschliesslich die Wahrheit suchen, sondern sie zu einem Tummelplatz niedriger egoistischer Leidenschaften machen, erfreut und erhebt man sich an dem Lebensbilde eines nur dem Idealen zugewandten Mannes wie Steinheil. Er hat die ihm verliehenen Gaben dazu benützt, unser Wissen und Können zu vermehren, und indem er Andere beglückte, ist er selbst glücklich gewesen.

Ernst Eduard Kummer.

Ernst Eduard Kummer[1]) war geboren zu Sorau in der Niederlausitz hart an der schlesischen Grenze den 29. Januar 1810. Schon 1813 verlor er seinen Vater und der Mutter fiel es bei knappen Mitteln schwer, ihn studiren zu lassen.

Er besuchte das Gymnasium seiner Vaterstadt und bezog 1828 die Universität Halle, wo er unter der Leitung von Professor Scherk sich der Mathematik widmete. Im 3. Studienjahre löste er eine mathematische Preisfrage und wurde auf Grund dieser Arbeit 1831 zum Doktor promovirt.

Von 1832—1842 wirkte Kummer als Gymnasiallehrer in Liegnitz. Hier legte er den Grund zu seinem künftigen Ruhme durch verschiedene Arbeiten, vorzugsweise dem Gebiete der Reihenlehre und der Integralrechnung angehörig; hervorzuheben ist hier das Liegnitzer Programm „Ueber eine Differentialgleichung 3. Ordnung" 1834, und ganz besonders seine Arbeit über die hypergeometrische Reihe (1836), in welcher er die berühmte Abhandlung von Gauss über diese Reihe fortsetzte und in würdiger Weise ergänzte. Diese Arbeiten verschafften ihm schon 1839 die Ernennung zum correspondirenden Mitglied der Berliner Akademie und 1842 die Berufung an die Universität Breslau.

In der Breslauer Periode von 1842—55 waren es zumeist zahlentheoretische Untersuchungen, die ihn beschäftigten. Auf diesem abstrakten Gebiete zeigte sich ganz besonders sein Scharfsinn und das tiefe Eindringen seines Geistes. Seine Abhandlung „über die aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen" (1845), in welcher er den neuen Begriff der „idealen complexen Prim-Faktoren" einführt und genau definirt; seine Untersuchungen über einen

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Gustav Bauer.

Satz von Fermat, dessen allgemeinen Beweis er zuerst erbrachte (1850), verschafften ihm den grossen Preis der Berliner Akademie.

Wie hoch damals das Ansehen Kummer's gestiegen war, geht wohl am besten daraus hervor, dass er 1855 Nachfolger Dirichlet's an der Berliner Universität, wie in der Akademie wurde. Es ist bemerkenswerth, dass Kummer in dieser letzten Periode seines Wirkens sich von den abstrakten Problemen der Zahlentheorie immer mehr den concreteren Problemen der Geometrie zuwandte. In diese Periode fällt seine berühmte Abhandlung „Ueber die allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlsysteme" (1860); seine Abhandlung über Flächen 4. Grads, auf denen Schaaren von Kegelschnitten liegen, und 1864 die Entdeckung der Fläche 4. Ordnung, die durch eine merkwürdige Configuration von 16 Punkten und 16 Ebenen ausgezeichnet ist und als „Kummer'sche Fläche" allen Mathematikern bekannt ist. Auch auf das Gebiet der Physik griff er über; seine Untersuchung über Strahlsysteme führten ihn auf die atmosphärische Strahlenbrechung; seine Vorträge an der Kriegsschule über ballistische Probleme auf physikalische Untersuchungen über den Luftwiderstand.

Kummer war ein ausgezeichneter Lehrer und hatte Freude am Lehren. Erst im Alter von 74 Jahren stellte er seine Vorlesungen ein und lebte fortan in stiller Zurückgezogenheit nur für seine zahlreiche Familie, bis ihn 9 Jahre später am 14. Mai 1893 ein Anfall von Influenza dahinraffte. Er war lange Zeit das Haupt der Berliner mathematischen Schule und der bedeutendste Vertreter dieser Wissenschaft in Deutschland.

Moritz Abraham Stern.

Moritz Abraham Stern[1]) war ein Schüler von Gauss und verbrachte seine ganze Gelehrten-Laufbahn als Professor der Mathematik zu Göttingen. Seit 1850 Mitglied unserer Akademie, hatte er das seltene Glück weit über das gewöhnliche Zeitmaass hinaus für die Wissenschaft thätig sein zu können. Seine zahlreichen und werthvollen Arbeiten, fast sämmtlich in dem Crelle'schen Journal veröffentlicht, erstrecken sich auf einen Zeitraum von 60 Jahren und ziehen sich durch 100 Bände des Journals hindurch. 1830 erschien seine erste Arbeit im 6. Bande des Journals und 1890 seine letzte im 106. Bande. Die meisten seiner Arbeiten, darunter auch seine erste und seine letzte Publikation, liegen auf dem Gebiete der höheren Arithmetik oder Zahlentheorie. Andererseits aber verdankt man ihm viele schätzbare Untersuchungen in verschiedenen Theilen der algebraischen Analysis, so insbesondere über die Theorie der Bernoulli'schen Zahlen und über die Theorie der Kettenbrüche. Ferner gehört hieher seine Abhandlung „über die Auflösung der transscendenten Gleichungen", eine von der königlich dänischen Gesellschaft der Wissenschaften gekrönte Preisschrift (1840), und, als wichtige Ergänzung hiezu, seine Abhandlung „Ueber die Anwendung der Sturm'schen Methode auf transscendente Gleichungen" (1846). Als selbständiges Werk erschien 1860 sein vortreffliches und allbekanntes „Lehrbuch der algebraischen Analysis". Er ist im 87. Lebensjahre am 30. Januar 1894 zu Zürich im Hause seines Sohnes, des Historikers Alfred Stern, gestorben.

---

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Gustav Bauer.

John Tyndall.

In den weitesten Kreisen bekannt war der hervorragende englische Physiker und Naturforscher John Tyndall, der am 4. Dezember 1893 auf seinem Landsitze Hind Head bei Haslemere im 74. Lebensjahre verschieden ist. Er konnte sich nicht wie so viele seiner mit Glücksgütern gesegneten Landsleute sorgenlos seiner Ausbildung und seinen ersten Studien hingeben, denn armer Leute Kind musste er sich die Mittel dazu selbst erwerben. Er war zuerst als Gehilfe bei der trigonometrischen Vermessung Englands und dann beim Eisenbahnbau beschäftigt, wodurch er nach zehnjähriger Arbeit sich so viel erspart hatte, um das ersehnte Ziel, eine Universität besuchen und naturwissenschaftliche Studien betreiben zu können, zu erreichen. Es ist ein für unsere Universitäten ehrenvolles Zeugniss, dass ein Mann wie Tyndall nach Deutschland kam, um sich Wissen zu erwerben. Er begab sich zunächst, schon 28 Jahre alt, mit seinem Landsmann Frankland nach Marburg, wo er neben Mathematik und Physik die Chemie bei dem vorzüglich auf dem Grenzgebiete der Physik und Chemie thätigen Bunsen betrieb und auch die Doktorwürde erwarb. Darauf ging er nach Berlin, um bei Gustav Magnus zu arbeiten, in dessen Laboratorium damals eine ungewöhnlich grosse Anzahl talentvoller junger Naturforscher mit Problemen der Physik beschäftigt war. Tyndall untersuchte daselbst die Erscheinungen an einem Wasserstrahl, dann in Gemeinschaft mit Knoblauch, dem jetzigen verdienstvollen Präsidenten der Kais. Leopoldinischen Akademie der Naturforscher, das Verhalten krystallisirter Körper zwischen den Polen eines Magneten.

Diese Arbeiten, welche ein ungewöhnliches Talent verriethen, lenkten die Aufmerksamkeit der englischen Gelehrten auf den aufstrebenden Physiker; denn nach seiner Rückkehr nach England erhielt er alsbald eine Lehrstelle am Queenwood

College, dann an der Royal Society und im Alter von 33 Jahren die Professur der Physik an der Royal Institution zu London als der Nachfolger des genialen Thomas Young und von Faraday, des grössten Experimentators seiner Zeit. Und nun begann für Tyndall eine an Erfolgen reiche wissenschaftliche Thätigkeit. Seine rein physikalischen Forschungen erstreckten sich über fast alle Theile dieser Wissenschaft; man verdankt ihm namentlich die wichtigsten Bereicherungen der Lehren von dem durch Faraday entdeckten Diagmagnetismus, der Polarisation des Lichtes, der Wärmestrahlung und der Akustik.

Tyndall hat sich jedoch nicht nur auf dem Gebiete der Physik Verdienste erworben; er war ein umfassender Geist, der überall in der Natur Probleme für seine Forschung fand.

Er hat sich bei der Lösung der so ungemein wichtigen Frage nach der Entstehung der niedersten Organismen betheiliget, ob dieselben sich aus den Nährlösungen von selbst, durch sogenannte Urzeugung bilden können oder ob ihr Auftreten stets einen schon vorhandenen Keim oder eine Organisation voraussetzt. Es gelang ihm als einem der ersten in der Luft das Vorkommen von Milliarden von Keimen nachzuweisen, welche auch da noch sich finden, wo man sie früher zerstört zu haben glaubte; auch gab er im Anschlusse an die Versuche von Schwann, M. Schultze, Schröder und Dusch, Hofmann etc., Methoden an, durch welche man jene Keime sicher zu tödten vermag. Er hat sich dadurch, namentlich durch seine Abhandlung über Staub und Krankheit, um die Ausbildung der jetzigen Lehre von der Fäulniss und Gährung, wodurch man auch ganz andere Anschauungen über die niedersten Organismen als Krankheitserreger erhalten hat, sehr verdient gemacht. Er war der Ansicht, die ersten Keime des Lebendigen wären durch Meteore von entwickelteren Weltkörpern auf unsere Erde gebracht worden.

Von mächtiger Wirkung waren seine auf mühsamen Wanderungen gemachten Beobachtungen über das Entstehen

und die Natur der Gletscher, über die Bewegung derselben und über die physikalischen Eigenschaften sowie die Bildung des Eises. Es haben diese seine Forschungen viel zu der regen wissenschaftlichen Untersuchung der Alpen beigetragen.

Auch ist sein Antheil an der Feststellung und der Anwendung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, welches er in allen seinen Schriften consequent durchführte, zu erwähnen.

Sehr bemerkenswerth und von grossem Erfolge begleitet waren Tyndall's Bemühungen, das durch die Wissenschaft Erkannte dem Volke in verständlicher Weise zugänglich zu machen; er wollte das Wissen verbreiten, um das leibliche und geistige Wohl des Menschengeschlechtes zu fördern. Als eifriger Wanderlehrer hielt er durch Klarheit der Darstellung und Gedankenreichtum wahrhaft mustergiltige Vorträge: über die Wärme, den Schall, das Licht, die Elektrizität etc. welche auch durch treffliche Uebersetzungen seiner Fachgenossen und Freunde Helmholtz und Wiedemann dem deutschen Publikum bekannt geworden sind.

Tyndall war ein tiefer Denker, der sich nicht nur mit den nächsten Ursachen einer Erscheinung befasste, sondern auch die gemeinschaftliche Ursache für eine grössere Gruppe von Erscheinungen zu finden trachtete, und sich viel mit der Frage der Wege und der Grenzen der menschlichen Erkenntniss abgab. Eine zur Eröffnung der Jahresversammlung der British Association zu Belfast gehaltene Rede über Naturwissenschaft und Offenbarung rief leidenschaftliche Anklagen der Orthodoxen gegen ihn hervor; man wird in späteren Jahren nicht mehr verstehen, wie es möglich war, die Naturforscher zu bekämpfen, welche in ihrer Wissenschaft ausschliesslich die Erscheinungen festzustellen und die Ursachen der Dinge zu suchen haben, aber in der Offenbarung kein Objekt für ihre Forschung finden.

Tyndall hat durch seinen Aufenthalt an deutschen Uni-

versitäten das Wesen der deutschen Naturforscher näher kennen und schätzen gelernt und namentlich durch seine Freundschaft mit Helmholtz die Beziehungen der englischen und deutschen Gelehrten inniger gestaltet und dadurch beiden Theilen wesentliche Dienste erwiesen. Es ist mit Tyndall ein Forscher von grossem Scharfsinn und von unermüdlicher Ausdauer in der Arbeit dahingegangen, der die Wissenschaft über Alles liebte und in uneigennützigster Weise seine Mittel zu ihrer Unterstützung sowie zur Beförderung des Wohles der Menschheit verwendete. Man wird ihn stets zu den bedeutendsten Naturforschern unserer Zeit zählen.

Heinrich Rudolf Hertz.

Durch den am 1. Januar 1894 erfolgten frühzeitigen Tod des Professors der Physik an der Universität zu Bonn, Heinrich Rudolf Hertz, hat die Naturwissenschaft einen der schmerzlichsten Verluste erlitten.

Hertz wollte sich anfangs dem Baufache zuwenden und besuchte zu diesem Zwecke die technischen Hochschulen zu Dresden und Berlin; aber immer mehr trat bei ihm die lebhafteste Neigung für die Mathematik und die Physik hervor, so dass er sich bald ganz dem Studium derselben, zuerst in München und dann in Berlin bei Helmholtz, widmete. In kürzester Zeit hatte sich der ausserordentlich talentvolle junge Mann, namentlich durch seine mit grösstem Scharfsinn erdachten und mit seltener Beherrschung der Mittel durchgeführten elektrischen Versuche an die Spitze der Physiker gestellt. Nachdem schon vor ihm Manche, wie Faraday und besonders Maxwell, gewisse Beziehungen des Lichtes und der Elektrizität angenommen und glaublich zu machen versucht hatten, ferner Bezold dieselben durch höchst bemerkenswerthe, von Hertz voll anerkannte Versuche erwiesen hatte, gelang es Letzterem den sicheren Beweis des innigen Zusammenhanges von Licht und Elektrizität zu führen. Er zeigte in

seinem berühmten Buche „über die Ausbreitung der elektrischen Kraft“, dass die elektrischen Wirkungen sich wie die Lichtwellen ausbreiten, dass sie ebenfalls auf Schwingungen des Aethers beruhen, dass die elektrischen und magnetischen Schwingungen wie die des Lichtes transversale sind, dass sie sich mit der nämlichen Geschwindigkeit wie die des Lichtes fortpflanzen, dass sie durch metallische Wände reflektirt, durch Hohlspiegel gesammelt, durch Prismen aus Asphalt gebrochen werden, durch Isolatoren wie die Lichtwellen durch Glas hindurchgehen, und die Erscheinungen der Polarisation zeigen können. Er hat die Länge der elektrischen Wellen gemessen und gefunden, dass sie viel grösser sind wie die Lichtwellen und eine Länge von mehreren Metern besitzen. Die Wellenbewegungen von einer sehr grossen Anzahl von Schwingungen in der Sekunde erregen unsere Netzhaut und bringen in uns die Empfindung des Lichtes hervor, bei einer geringeren Anzahl von Schwingungen haben wir die dunkeln Wärmestrahlen mit ihrer Wirkung auf die Thermosäule, und bei einer noch geringeren Anzahl die elektrischen Wellenerscheinungen.

Durch das hohe Interesse, welches diese Entdeckungen von Hertz bei jedem denkenden Menschen erregen mussten, ist sein Name auch ausserhalb der engeren Fachkreise weithin bekannt geworden; man durfte die grössten Hoffnungen in die fernere Thätigkeit des noch nicht 37 Jahre alten, in vollster geistiger Kraft stehenden Forschers setzen, welche nun durch sein Hinscheiden vernichtet sind.

Hertz war eine vornehme Natur, von edelster Gesinnung und tief bescheidenem Wesen. Noch wenige Wochen vor seinem Tode hat der schwer leidende Mann in einem an mich gerichteten Schreiben (vom 26. November 1893), in welchem er mich ersuchte, der Akademie, die ihn zu ihrem Mitgliede erwählte hatte, seinen Dank auszusprechen, dieser Bescheidenheit den rührendsten Ausdruck gegeben. Ich

kann es mir nicht versagen, in diesen seinem Andenken gewidmeten Zeilen seine Worte wiederzugeben; er schreibt: „Gleichzeitig aber bitte ich Sie auch, freundlichst der Vermittler meines Dankes an die Akademie selbst sein zu wollen, welche mir eine so grosse Freude bereitet hat und mir eine Ehre erwiesen hat, die mir unendlich theuer ist. Mit gerechtem Stolze erfüllt mich der Gedanke, nun in einen Kreis aufgenommen zu sein und ihm zugerechnet zu werden, welcher mir, wie ich mich wohl erinnere, schon während meiner Studienzeit in München als eine hoch und unerreichbar über mir schwebende Verkörperung idealen wissenschaftlichen Strebens erschien. Mit Schmerz erfüllt es mich freilich auch, dass ich nun in diesem Kreise nicht mehr diejenigen Männer begrüssen kann, welche damals in engerem Sinne meine Lehrer waren; vor allen wünschte ich gar zu gern den von mir hochverehrten v. Beetz noch als Collegen die Hand schütteln zu können, dessen einfache Gewissenhaftigkeit in der Forschung und milde Freundlichkeit als Lehrer mir immer als Vorbild vorgeschwebt hat. Doch dies liegt im natürlichen Lauf der menschlichen Dinge und auch so fühle ich durch diese Aufnahme dankbar die Vorstellungen und Empfindungen in mir aufleben, mit welchen es mir vergönnt war, mich in München zuerst der reinen Wissenschaft zuzuwenden".

Für alle Zeiten wird man gedenken, dass Hertz es war, der das neue grosse Gebiet der elektrischen Wellen und Strahlen durch Experimente erschlossen hat, welche der Ausgangspunkt für heute noch ungeahnte weitere Erkenntnisse sein werden.

Alexander Theodor v. Middendorff.

Der angesehene russische Naturforscher und Reisende Alexander Theodor von Middendorff ist am 28. Januar 1894 auf seinem Gute zu Hellenorm in Livland in einem Alter

von 78½ Jahren nach Vollendung seiner Lebensaufgabe gestorben. In St. Petersburg geboren, studirte er an der Universität Dorpat Medizin und erwarb sich daselbst den Grad eines Doktors der Heilkunde. Seine Begabung sowie auch die Neigung noch wenig bekannte Länder zu sehen und deren Fauna und sonstige Eigenart kennen zu lernen, führten ihn zu eingehenden naturwissenschaftlichen Studien, welche er an den Universitäten zu Berlin, Erlangen, Wien und Breslau eifrig oblag. Durch dieselben wohl vorbereitet, wurde er nach der Rückkehr in sein Vaterland zum Adjunkten des Professors für Zoologie an der Universität Kiew bestellt, begann aber ein Jahr darauf im Alter von 25 Jahren seine umfassenden Reisen, für welche er durch glückliche Eigenschaften des Körpers und Geistes in hohem Grade geeignet war.

Die erste Reise führte ihn mit der von Carl Ernst v. Baer geleiteten Expedition an das weisse Meer und nach Lappland, wo ihm die Aufgabe zufiel, die Vogelwelt des hohen Nordens zu studieren. Dadurch wurde man in den Kreisen der kais. russischen Akademie der Wissenschaften auf ihn aufmerksam und erwählte ihn, nachdem er vorher zum ausserordentlichen Professor der Zoologie in Kiew ernannt worden war, zum Leiter der auf Veranlassung der Akademie ausgesandten grossen Expedition in den äussersten Norden und Osten Sibiriens, wobei er durch das Pamirland bis an den Amur vordrang. In Folge der glücklichen Ergebnisse dieser kühnen und für die Naturgeschichte überaus fruchtbaren Reise wurde er Adjunkt für Zoologie an der Petersburger Akademie, dann ausserordentliches und ordentliches Mitglied und später Sekretär und Ehrenmitglied dieser Akademie, zu deren bekanntesten Mitgliedern er zählte. Er hat darnach noch mehrere Reisen gemacht; mit dem Grossfürsten Alexis Alexandrowitsch nach der Krim und durch das Mittelmeer nach Teneriffa, Orotava und den Cap Verdischen Inseln; dann mit dem Grossfürsten Wladimir Alexandrowitsch in das mittlere und südliche

Sibirien an den Altai bis zur chinesischen Grenze; mit dem Grossfürsten Alexei nach dem Norden Russlands, nach dem Weissen Meer, Nowaja Semlja und Island; hierauf noch seine berühmte Reise in das Ferghana-Gebiet und endlich eine letzte abermals in den Norden Russlands.

Die Resultate dieser Fahrten, welche er in grösseren Werken beschrieb, waren für die Kenntniss Russlands, seine geologischen, geographischen, ethnographischen und meteorologischen Verhältnisse und für die Wissenschaft sehr nützlich. Vor Allem wichtig sind die ornithologischen Ergebnisse der Lappländer Reise; die Funde der Reise in den äussersten Norden und Osten Sibiriens, bei deren Bearbeitung er die zoologische Abtheilung übernommen hatte, welche eine würdige Ergänzung zu den früheren Arbeiten von Pallas bildet; die Beschreibung der Barobinzensteppe im asiatischen Russland, die Untersuchung des Golfstroms ostwärts vom Nordkap und seine Einblicke in das Ferghanathal im Süden von Turkestan. Von besonderer Einsicht und kritischer Schärfe zeugen ferner die Untersuchungen an Schädeln des gemeinen Landbären als Beleuchtung der Streitfrage über die Arten fossiler Landbären; die Beiträge zur Malacozoologia rossica waren für die Kenntniss der Thierwelt des russischen Reiches von Bedeutung; auch sind seine Angaben über die Wahrscheinlichkeit eines im Vergleich mit dem Meerwasser der Jetztzeit höheren Gehaltes an Bittererde in dem Wasser vieler Meere der Juraperiode, sowie seine Untersuchung über die Temperaturen im Scherginschacht zu Jakutzk hervorzuheben.

Middendorff hat sich durch diese Arbeiten einen wohlverdienten Ruf als Naturforscher, Geograph und Ethnograph gemacht.

Peter Josef van Beneden,

Professor der Zoologie und vergleichenden Anatomie an der Universität Löwen, eines der thätigsten Mitglieder der belgischen Akademie und einer der bedeutendsten Naturforscher seines Vaterlandes, ist am 8. Januar 1894 im hohen Alter von 84 Jahren gestorben. Er hatte wie so viele andere Naturforscher anfänglich Medizin studirt, interessirte sich aber von früh an lebhaft für die Organisation der Thiere. Sein Name wurde zuerst bekannt durch die wichtigen Studien über die Fauna der belgischen Nordsee, wozu er sich aus eigenen Mitteln in Ostende ein Laboratorium und ein Aquarium eingerichtet hatte, als erste am Meere gelegene zoologische Station in Europa. Seine grösste Leistung waren seine Untersuchungen über die Parasiten des Thierkörpers; in seinem grossen Werke über die Geschichte der Entwicklung der innerlichen Würmer hat er die vielfachen Umgestaltungen und die sonderbare Vermehrung der Eingeweidewürmer als einer der ersten nachgewiesen und den feineren Bau, sowie die Entwicklung, die Metamorphosen, die Fortpflanzung und die ganze Lebensgeschichte dieser Thiere auf das Genaueste beschrieben. Gleichzeitig mit unserem verstorbenen Collegen von Siebold, oder eigentlich schon vorher, hatte van Beneden die entozootische Fauna der ozeanischen Fische, besonders der Rochen und Haie, untersucht und gezeigt, dass die als blosse Köpfe oder finnenartige Parasiten in verschiedenen Organen vorkommenden Bandwurmköpfe (Tetrarhynchusköpfe) aus wandernden Embryonen hervorgehen und sich dann in dem Darmkanal von Fischen, welche dieselben mit den Wirthen verschlungen haben, durch Gliederbildung in die geschlechtsreifen Formen verwandeln. Dadurch lieferten van Beneden und Siebold den Beweis für Steenstrup's Anschauung über den Generationswechsel, nach welcher der Kopf des Bandwurmes eine larvenartige Amme ohne Geschlechtstheile dar-

stellt, die Glieder aber die Geschlechtsthiere repräsentiren. Es existirt somit in einem gewissen Stadium der Entwicklung von den späteren Bandwürmern nur der selbständig lebende sogenannte Kopf (Scolex), der allmählich unter günstigen Verhältnissen an seinem hinteren Ende ein Glied nach dem anderen hervortreibt. Die in den Organen abgelagerten Blasenwürmer hatte Siebold für pathologische Gebilde gehalten, während van Beneden darthat, dass sie sich an die Tetrarhynchusköpfe anschliessen und unreife Zustände der Bandwürmer darstellen, die sich ebenfalls dann im Darm geeigneter Thiere in Bandwürmer verwandeln.

Diese seine Untersuchungen haben die Annahme einer Urzeugung, welche man bei den Eingeweidewürmern noch am längsten festgehalten hatte, da man deren Entstehung aus vorhandenen Eiern nicht nachzuweisen im Stande war, erschüttert und gestürzt. Die französische Akademie krönte sein Werk mit dem grossen Staatspreise für Naturwissenschaft.

van Beneden stellte in einer bedeutsamen Arbeit den Unterschied zwischen Parasitismus und Commensalismus in der Thierwelt auf; die bei dem Menschen und den Hausthieren nicht vorkommenden Commensalen sind darnach nur scheinbare Parasiten, Geschöpfe, die zwar ganz nach Parasitenart auf grösseren Thieren leben und durch ihre Organisation den Parasiten ähneln, aber doch keine Schmarotzer sind, indem sie nicht von den Säften und Geweben ihres Trägers sich nähren, sondern als Mitesser von den Nahrungsstoffen desselben zehren.

In einer späteren Abhandlung beschrieb er die lebenden und fossilen Walfische, zu welchem Zwecke er sich an mehreren Expeditionen zum Fange dieser grossen Säuger betheiligte. Auch als Paläontologe hat er sich verdient gemacht, indem unter seiner Leitung die bei den Befestigungsarbeiten von Antwerpen ausgegrabenen fossilen Ueberreste von Seethieren präparirt und aufgestellt wurden.

van Beneden gehört zu den Begründern der heutigen vergleichenden Anatomie; er war einer der Ersten, der die Zoologie aus den Fesseln einer bloss äusserlichen Beschreibung der Arten befreien half.

Alphonse de Candolle.

Am 4. April 1893 ist zu Genf der berühmte Botaniker Alphonse de Candolle[1]) aus dem Leben geschieden. Er hat vor Allem das Verdienst die von seinem Vater Pyramus de Candolle begonnenen grossen systematischen und pflanzengeographischen Unternehmungen in der erfolgreichsten Weise fortgesetzt zu haben. Durch den Einfluss des Vaters, in dessen Besitz sich umfassende Pflanzensammlungen und eine werthvolle Bibliothek befanden, wurde die Neigung zur Botanik in ihm erweckt; aber nachdem er anfangs an der Universität zu Genf Vorlesungen über Philosophie, beschreibende Naturwissenschaften und Physik gehört hatte, veranlasste ihn in den damaligen kritischen Zeiten der Vater vorerst die Jurisprudenz zu absolviren und den juristischen Doktorgrad zu erwerben, um sich eine sichere Lebensstellung zu verschaffen. Erst darnach gab er sich ausschliesslich den botanischen Studien unter der Leitung seines Vaters hin. Bald vermochte er den Letzteren in dem akademischen Unterrichte zu unterstützen, so dass er schon im Alter von 29 Jahren als sein Nachfolger erwählt wurde, nachdem jener sich von dem Lehramte zurückgezogen hatte, um ganz seinen wissenschaftlichen Unternehmungen sich widmen zu können. Nach dem Tode des Vaters war er der Erbe des Herbariums, der Bücher und der Aufzeichnungen desselben; er hatte aber damit auch die Verpflichtung ererbt, dieselben im Sinne des Verblichenen fortzuführen und für die Wissenschaft nutzbar zu machen. Dies hat er nun auch in einer so freigebigen

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Ludwig Radlkofer.



und uneigennützigen Weise gethan, wie es noch nie von einem Botaniker geschehen war. Im Alter von 44 Jahren wurde er zu seinem Schmerz durch politische Einflüsse genöthigt, seiner Professur und der Vorstandschaft des botanischen Gartens zu Genf zu entsagen, was aber seinen wissenschaftlichen Arbeiten zu Gute kam, ja sie in ihrer Ausdehnung erst ermöglichte.

Es sind vorzüglich zwei Werke, durch welche Alphonse de Candolle sich schwerwiegende Verdienste um die Wissenschaft erworben hat, jedes für sich ausreichend, um dem Manne die dauernde Dankbarkeit der Fachgenossen zu sichern und ihm eine Stelle unter den ersten Förderern der Wissenschaft zu gewinnen: der von seinem Vater im Jahre 1826 begonnene, von A. de Candolle (von dem im Jahre 1844 erschienenen VIII. Bande ab) fortgesetzte und im Jahre 1873 (mit dem XVII. resp. XX. Bande für die Dicotyledonen) abgeschlossene Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis (gefolgt von den Suites au Prodromus für die Monocotyledonen etc.); ferner dessen Géographie botanique raisonnée (1855).

Durch das erstere, grosse allgemeine Pflanzenwerk, von welchem er selbst wesentliche Theile verfasste, und zu dessen Durchführung es trotz des Zaubers, den der Name de Candolle auf die Systematiker ausübte, einer zielbewussten Ausdauer und Energie bedurfte, wie sie eben A. de Candolle auszeichnete, hat derselbe der Gewächskunde ein tieferes Fundament geschaffen, welchem er die grösstmögliche Festigkeit und Nutzbarkeit dadurch zu geben verstand, dass er ihm ein jederzeit erneuter Berathung zugängliches Archiv, eine Sammlung naturhistorischer Dokumente zur Seite stellte, indem er in dem Herbarium Prodromi soviel nur immer möglich und in einem Maasse, wie es bis dahin noch nirgends geschehen war, ein reiches Material für die Bearbeitung der einzelnen Familien zu vereinigen und nach der Bearbeitung für die Dauer niederzulegen bestrebt war. Es bedurfte in einer Zeit, in welcher

die systematische Arbeit durch die in den Vordergrund getretene anatomische und entwicklungsgeschichtliche Richtung eine wesentliche Einbusse erlitten hatte und noch fern von dem jetzt durch die Anwendung eben dieser Richtungen auf sie gewonnenen Aufschwunge war, der ganzen Hingebung eines für die ererbte Aufgabe begeisterten Mannes, wie A. de Candolle, um dieselbe zu entsprechendem Ende zu führen. Nach dem richtigen, in seiner „Phytographie" 1883 gemachten Ausspruche A. de Candolle's selbst, dass die systematisch-descriptiven Werke am längsten ihren Werth behalten, mag man getrost den Prodromus als das wichtigste Werk de Candolle's betrachten, wenn er auch nicht lediglich, wie seine Pflanzengeographie, ihm selbst seinen Inhalt verdankt. Mit demselben hängt auch A. de Candolle's verdienstvolle Arbeit bezüglich der gesetzmässigen Regelung der botanischen Nomenclatur (unter Sanctionirung durch den internationalen botanischen Congress zu Paris im Jahre 1867) zusammen.

Durch das zweite, durch Alexander von Humboldt's Schriften über die Verbreitung der Pflanzen sowie durch die Arbeiten seines Vaters angeregte Werk, die Geographie botanique, erscheint A. de Candolle gleichsam als der Schöpfer der pflanzengeographischen Disziplin, insoferne sich dieselbe die Erforschung der ursächlichen Momente für die gegenwärtige Vertheilung der Pflanzenwelt auf der Erdoberfläche zum Ziele setzt. Um das „Rerum cognoscere causas", wie er direkt hervorhob, handelte es sich ihm dabei, und nicht bloss, was bis dahin im Wesentlichen die Pflanzengeographie ausmachte, um die Registrirung und Schilderung der thatsächlichen Verhältnisse in der Vertheilung der Pflanzen. Er wendete namentlich der Abhängigkeit der Pflanzenvertheilung von dem Einflusse der Wärme und des Lichtes sein Augenmerk zu und nahm zugleich entsprechende Rücksicht auf die damals bereits bekannt gewordenen geologischen Befunde, jedoch nicht ohne entsprechende Vorsicht bei ihrer

Verwerthung zu üben und zu verlangen. Mit besonderer Vorliebe ging er der Vertheilung und dem Ursprunge der Kulturpflanzen nach, über welche er noch in seinem 77. Jahre (1883) eine besondere, in den weitesten Kreisen geschätzte Arbeit (Origine des plantes cultivées) lieferte, welche ebenso seinen unermüdlichen Fleiss wie seinen kritischen Sinn hervortreten lässt.

Eine besonders originelle Schrift ist seine: Histoire des sciences et des savants depuis deux siècles, suivies d'autres études sur des sujets scientifiques, en particulier sur la sélection dans l'espèce humaine (1873), in der er in geistreicher Weise die Leistungen der Gelehrten aus ihren Eigenschaften abzuleiten suchte.

Die Werke de Candolle's sind auf eine durch einen erstaunlichen Fleiss und eine musterhafte Genauigkeit und Treue der Untersuchung gewonnene umfassende Erfahrung gegründet: sie werden daher einen für alle Zeiten bleibenden Werth in der botanischen Wissenschaft besitzen.

Arcangelo Scacchi[1])

geboren den 9. Februar 1810 in Gravina (Bari) auf Sizilien, Senator des Königreichs Italien, Professor der Mineralogie an der Universität und Direktor des mineralogischen Museums zu Neapel, seit 1867 auswärtiges Mitglied unserer Akademie, starb am 11. Oktober 1893 in Neapel, wo er mehr als 50 Jahre hindurch gewirkt hatte.

Am meisten bekannt ist Scacchi wohl durch seine Arbeiten über den Vesuv. Seit 1842 widmete er seine Zeit dem Studium der Eruptionen dieses Vulkans und der Produkte desselben, und ihm verdanken wir wesentlich die Kenntniss der grossen Mannigfaltigkeit von Mineralien, welche sich theils als sublimative Bildungen auf den Laven des Kraters,

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Paul Groth.

theils in den zahlreichen Auswürflingen der Somma, hier meist metamorphischer Entstehung, finden. Nicht nur von den früher bereits bekannten Mineralien lieferte er eingehendere Untersuchungen, welche, wie die berühmte Arbeit über die Humitgruppe, die Grundlage jedes weiteren Studiums derselben geworden sind, sondern auch die Entdeckung zahlreicher neuer Mineralien, zum Theil noch gar nicht bekannter chemischer Verbindungen, war das Ergebniss seiner Vesuvstudien, welche besonders bei den sehr vergänglichen Sublimationsprodukten mit grossen Schwierigkeiten verbunden waren. Trotzdem war er stets darauf bedacht, jene in solchen Mengen zu sammeln, dass sie nicht nur zu seinen Untersuchungen und zur Bereicherung des von ihm geleiteten Museums dienen konnten, sondern ihn auch in den Stand setzten, seinen Fachgenossen in reichlichem Maasse davon mitzutheilen. Dies that Scacchi nun in einer selten liberalen Weise und ermöglichte dadurch auch eine Reihe wissenschaftlicher Arbeiten Anderer über Vesuvmineralien, ebenso wie er gern fremde Sammlungen durch Abgabe von Mineralien unterstützte. So verdankt auch die hiesige Sammlung, an älteren Vorkommnissen des Vesuv wohl eine der reichsten ausserhalb Italiens, ihm wesentliche Vervollständigung durch seltene neuere Vorkommen. In chemisch-geologischer Beziehung nicht minder wichtig, als seine Studien am Vesuv, war seine Untersuchung der fluorhaltigen Auswürflinge der bis dahin unbeachteten kleinen Vulkane, welche die Tuffe von Sarno und Nocera in der Campagna hervorgebracht haben, weil diese über Fumarolenwirkungen belehrten, welche eine merkwürdige Aehnlichkeit ihrer chemischen Produkte mit gewissen, in den ältesten massigen Gesteinen, besonders den Graniten, vorkommenden Mineralbildungen zeigen.

Neben diesen mineralogischen und geologischen Studien beschäftigten Scacchi zahlreiche und umfangreiche Arbeiten auf dem Gebiete der chemischen Krystallographie. Seine

mit höchster Sorgfalt angestellten Beobachtungen über die Schwankungen der Flächenwinkel der Krystalle und die Verschiedenheiten der physikalischen und krystallographischen Eigenschaften chemisch übereinstimmender Körper führten ihn auf theoretische Vorstellungen, welche er in seinen Publikationen über „Polyedrie“ und „Polysymmetrie“ niederlegte. Wenn diese Vorstellungen auch heute nicht mehr als anerkannte gelten können, so behalten doch seine Beobachtungen selbst stets hohen Werth in Folge der geradezu mustergiltigen Sorgfalt, mit welcher dieselben angestellt und in Wort und Bild wiedergegeben sind, so dass es möglich ist, sie in ganzem Umfange als thatsächliche Grundlagen der inzwischen aus den Fortschritten der Wissenschaft sich ergebenden Anschauungen zu benutzen. Namentlich enthalten seine Arbeiten über die rechts- und linksweinsauren Salze ein hochinteressantes und bisher noch viel zu wenig berücksichtigtes Material von Beobachtungen über gewisse merkwürdige Hemiedrieverhältnisse, welche erst in neuester Zeit als theoretisch möglich anerkannt, von ihm aber schon vor Jahrzehnten richtig beobachtet und beschrieben worden waren, so dass diese Arbeiten in nicht geringerem Grade, als die zuerst erwähnten, für alle Zeiten eine grosse Bedeutung für die Entwicklung der Krystallographie behalten werden.

Scacchi war einer der angesehensten Gelehrten Italiens; sein Name wird für immer mit dem des Vesuv's verknüpft bleiben.

Sitzung vom 5. Mai 1894.

1. Herr N. RÜDINGER hält unter Vorzeigung von anatomischen Präparaten einen Vortrag: „über die Gehirne verschiedener Hunderacen".

2. Herr HUGO SEELIGER macht eine Mittheilung: „Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes".

3. Herr E. v. LOMMEL legt eine Arbeit der Herren L. GRAETZ und L. FOMM: „über normale und anomale Dispersion elektrischer Wellen" vor.

4. Herr LUDWIG BOLTZMANN bespricht drei Abhandlungen

a) von dem Vortragenden: „über den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen";

b) von dem Vortragenden: „zur Integration der Diffusionsgleichung bei variabeln Diffusionscoefficienten";

c) von Prof. A. WASSMUTH in Graz: „über die Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwangs auf die Elektrodynamik".

5. Herr W. v. GÜMBEL überreicht eine Abhandlung des auswärtigen Mitgliedes F. v. SANDBERGER in Würzburg: „über die Erzlagerstätte von Goldkronach bei Berneck im Fichtelgebirge".

Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Bei verschiedenen Gelegenheiten habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass ein Theil der Untersuchungen Maxwell's[1]) über den Saturnring keineswegs einwandfrei ist und dass sich gegen die Richtigkeit der von ihm angewandten Integrationsmethode begründete Zweifel vorbringen lassen. Ich möchte mir erlauben im Folgenden auf diesen Gegenstand zurückzukommen, hierbei aber auch auf die von Hirn[2]) veröffentlichten Untersuchungen, die wenig bekannt zu sein scheinen, in Kürze eingehen. Wie schon die ganz verschiedenen Wege, welche beide Forscher gehen, klar zeigen, ist die Hirn'sche Abhandlung ohne Kenntniss der mehr als 16 Jahre früher ausgearbeiteten Untersuchung von Maxwell entstanden. Es wird dies im Uebrigen noch besonders in einem von Hirn an Moigno gerichteten Briefe hervorgehoben, welcher der Abhandlung als Anhang beigegeben ist.

---

1) On the Stability of the motion of Saturn's Ring. An Essay, which obtained the Adams Prize for the year 1856 in the University of Cambridge.

2) Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne, présenté le 16 Septembre 1872 à l'Académie des Sciences.

Was die Maxwell'sche Untersuchung betrifft, so werde ich mich hier im Wesentlichen nur mit seiner Theorie der Bewegung eines festen Ringes beschäftigen. Die Maxwell-sche Arbeit enthält bekanntlich noch sehr viel mehr und darunter sehr interessante Dinge, freilich nicht alles in wünschenswerther oder auch nur erforderlicher Strenge. Hierauf zurückzukommen, muss ich mir für eine spätere Gelegenheit vorbehalten.

Zunächst möchte ich aber an die von Laplace in der Mécanique céleste gegebenen Entwicklungen anknüpfen und einige Bemerkungen anschliessen, da hierdurch die Sachlage, wie sie die Annahme einer festen Constitution der Saturnringe schafft, nicht schwieriger zu klären sein dürfte, als durch die viel complicirteren aber nicht strengen Untersuchungen von Maxwell oder die Bemerkungen von Hirn.

Es seien R und S die Gesammtmasse des Ringes und des Saturn und mit denselben Buchstaben mögen die beiden Schwerpunkte bezeichnet werden.

Es sei ferner r die Entfernung RS, ϑ der Winkel, den RS mit einer festen durch R gehenden Richtung bildet, φ der Winkel, den RS mit einer durch R gehenden mit dem Ringe fest verbundenen Richtung bildet, dm ein Massenelement des Ringes und ϱ, r' seine Entfernungen von R bezw. von S.

Setzt man dann $\varphi + \vartheta = \psi$ und ausserdem das Potential

$$V = k^2 \sum \frac{dm}{r'}$$

wo k die Anziehungsconstante ist, so werden die zuerst von Maxwell aufgestellten Differentialgleichungen für die Bewegung von R gegen S, sofern die Bewegung als in der Ringebene vor sich gehend betrachtet wird:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\psi}{dt^2}\cdot\sum\varrho^2\,dm = S\frac{\partial V}{\partial\varphi}\\
&\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\\
&\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = -\frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi}
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Es werde nun der von Laplace betrachtete Fall eines homogenen unendlich dünnen Kreisringes betrachtet. Hier ist V unabhängig von φ und demzufolge, wenn γ eine Constante bedeutet:

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}$$

Führt man rechtwinkelige Coordinaten $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ ein, so kann man schreiben:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{R+S}{R}\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\,\frac{y}{r}$$

S beschreibt also um das Centrum des Kreisringes eine Centralbewegung.

Nun lässt sich leicht zeigen, dass $\frac{\partial V}{\partial r}$ stets positiv ist, woraus folgt, dass S vom Centrum des Kreises abgestossen wird. Die Bewegung ist also instabil und ein Zusammenstoss des Ringes mit dem Saturnkörper unausbleiblich. Es soll hier gezeigt werden, in wie hohem Grade der Zustand, wenn S genau im Centrum des Kreises sich befindet, instabil ist und wie eine minimale Verschiebung ausreicht, um das Auffallen des Ringes auf den Saturn in kurzer Zeit herbeizuführen. Erhält S eine sehr kleine Geschwindigkeit c vom

Kreismittelpunkt fort, so wird es sich offenbar in gerader Linie dem Ringe nähern. Man hat dann

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r}$$

und hieraus

$$\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = c^2 + 2\,\frac{R+S}{R}\,(V - V_0) \tag{2}$$

wo V_0 der Werth von V für $r = 0$ ist. Für V ergiebt sich sofort, wenn a der Ringradius ist:

$$V = \frac{k^2 \cdot R}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2\,a\,r\cos\psi}}$$

Mit Hülfe der Transformation

$$\frac{\sin\psi}{\sqrt{1 - 2\,\frac{r}{a}\cos\psi + \frac{r^2}{a^2}}} = \sin u$$

kann man für alle Rechnungen viel bequemer schreiben:

$$V = \frac{2\,k^2 R}{\pi\,a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d u}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 u}}$$

$$V_0 = \frac{k^2 R}{a}$$

Man hat also jetzt

$$\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = c^2 + \frac{4\,k^2 (R+S)}{\pi\,a} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d u}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 u}} - \frac{\pi}{2} \right\}$$

Entwickelt man noch Potenzen von $\frac{r}{a}$ und setzt zur Abkürzung:

$$x = \frac{r}{a}$$

$$\varrho = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot x^2 + \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}\right)^2 x^4 + \ldots$$

$$\lambda^2 = \frac{k^2 (R + S)}{2\,a}$$

so wird einfach

$$d\,t = \frac{a\,d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho\, x^2}}$$

Um die Zeit t zu berechnen, welche verfliesst vom Anfange der Bewegung bis zum Zusammenstosse der Saturnoberfläche mit dem Ringe, hat man:

$$t = a \int_0^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho\, x^2}}$$

wobei x_1 den Endwerth von x bedeutet.

Das Integral kann unschwer mit beliebiger Annäherung berechnet werden. Ich begnüge mich, seinen Werth zwischen zwei genügend nahe Grenzen einzuschliessen. Man sieht sofort, dass

$$a \int_0^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2}} > t > a \int_0^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda_1^2 x^2}}$$

wobei

$$\lambda_1^2 = \lambda^2 \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 x_1^2 + \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}\right)^2 x_1^4 + \ldots\right]$$

Man hat demzufolge:

$$\frac{a}{\lambda}\cdot\log\left[\frac{\lambda x_1 + \sqrt{c^2+\lambda^2 x_1^2}}{c}\right] > t$$

$$t > \frac{a}{\lambda_1}\log\left[\frac{\lambda_1 x_1 + \sqrt{c^2+\lambda_1^2 x_1^2}}{c}\right]$$

Der Saturnring könnte nach Ansicht von Laplace aus einer sehr grossen Anzahl unendlich dünner Ringe, welche aber inhomogen sind, bestehen. Der Augenschein lehrt aber, dass der Saturnring, als Ganzes aufgefasst, den Eindruck einer im hohen Grade homogenen Massen-Anordnung in peripherischer Richtung macht und man wird die Bewegung von S gegen das gemeinsame Centrum dieser Ringe jedenfalls nahezu erhalten, wenn man den ganzen Saturnring als eine breite aber unendlich dünne Scheibe ansieht. Bezeichnet dann a_0 und a_1 den Radius der inneren bezw. der äusseren Begrenzung, σ die Entfernung eines Ringelementes vom Ringcentrum, δ die homogene Dichtigkeit, so ist jetzt zu setzen:

$$V = k^2\,\delta\int_{a_0}^{a_1}\sigma\,d\,\sigma\int_0^{2\pi}\frac{d\,\psi}{\sqrt{\sigma^2+r^2-2\,\sigma\,r\cos\psi}}$$

Benutzt man wieder die oben angewandte Transformation, und führt die Integration in Bezug auf σ aus, so ergiebt sich:

$$V = 4\,k^2\,\delta\times$$

$$\left\{a_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{r^2}{a_1^2}\sin^2 u}\;d\,u - a_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{r^2}{a_0^2}\sin^2 u}\;d\,u\right\}$$

Analog dem früheren wird man zur Abkürzung setzen

$$\frac{r}{\sqrt{a_0 \cdot a_1}} = x$$

$$\varrho = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2 \cdot \frac{a_0^2 + a_0 a_1 + a_1^2}{3 a_0 a_1} + \dots.$$

$$\lambda^2 = \frac{k^2 (R + S)}{a_0 + a_1}$$

Hierdurch erhält man

$$\sqrt{a_0 a_1} \frac{d x}{d t} = \sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho x^2}$$

und die Zeit t vom Anfange der Bewegung bis zum Zusammenstosse der inneren Ringbegrenzung mit dem Saturnkörper wird:

$$t = \sqrt{a_0 a_1} \int_0^{x_1} \frac{d x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2 \varrho}}$$

Es könnte t nun wieder innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen werden. Für die folgende Abschätzung genügt es aber vollkommen zu setzen:

$$t = \frac{\sqrt{a_0 a_1}}{\lambda} \cdot \log \operatorname{nat} \left\{ \frac{\lambda x_1 + \sqrt{c^2 + \lambda^2 x_1^2}}{c} \right\}$$

In der m. Entfernung 9.539 erscheinen die Grössen a_0, a_1 und der Radius des Saturn unter den scheinbaren Winkeln 19″.75, 13″.75, 8″.65. Es ist hierbei nur der helle Ring in Betracht gezogen, also der Florring ganz unberücksichtigt gelassen worden, wodurch natürlich t zu gross wird. In den gewöhnlichen astronomischen Einheiten ausgedrückt, ergiebt sich so:

$$\log \lambda = 7.8684 - 10$$
$$\log x_1 = 9.4906 - 10$$

und hiermit:

$$t = [9.0137] \log \operatorname{nat} \left\{ \frac{[7.3590]}{c} + \sqrt{1 + \frac{[4.7180]}{c^2}} \right\}$$

t erhält man also in Tagen. Die in eckige Klammern gesetzten Zahlen bedeuten Brigg. Logarithmen, deren zugehörige Zahlen zu nehmen sind. Da es sich in den folgenden Zahlen nur um äusserst kleine c handelt, so wird genügend genau:

$$t = [9.3759] \log \left\{ \frac{[7.6600-10]}{c} \right\}$$

So findet man beispielsweise für

$\frac{1}{c} =$		
	4 Millionen	$t = 1.01$ Tag
	40000 Millionen	1.96
	4 Billionen	2.44

Diesen 3 Anfangsgeschwindigkeiten entsprechen in der Zeitsecunde die Geschwindigkeiten von 420, 0.042, 0.00042 mm. Es ergiebt sich, dass also selbst bei einer so überaus kleinen Anfangsgeschwindigkeit wie 0.00042 mm pro Secunde schon nach $2^1/_2$ Tagen der innere helle Ringrand mit der Oberfläche des Saturnkörpers zusammenstossen wird. In so hohem Grade instabil ist also der Anfangszustand.

Ich gehe nunmehr zur Integration der Gleichungen (1) über nach der von Maxwell angewandten Methode. Man kann aber gleich von Anfang an die Rechnungen sehr wesentlich vereinfachen und die obigen 3 Gleichungen auf zwei zurückführen, wodurch eine wesentlich kürzere Darstellung sich gewinnen lässt. Setzt man zur Abkürzung

$$A = \frac{R+S}{RS} \Sigma \varrho^2 \, dm$$

so folgt aus (1) sofort

$$A \frac{d\psi}{dt} + r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$$

wo c eine Integrationsconstante ist. Und da weiter $\psi = \varphi + \vartheta$ war, so hat man

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c - A\frac{d\varphi}{dt}}{A + r^2}$$

Hierdurch werden die zwei letzten Gleichungen (1):

$$\left.\begin{aligned} (A + r^2)^2 \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= -2Acr\frac{dr}{dt} \\ &+ 2A^2 r \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r^2 (A + r^2) A \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ (A + r^2)^2 \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} &= -rc^2 + (A + r^2)^2 \frac{d^2 r}{dt^2} \\ &- A^2 r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2Acr\frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Integration dieser Differentialgleichungen ist selbst für sehr einfache Formen von V nicht durchführbar. Es soll nun die von Maxwell eingeführte Voraussetzung gemacht werden, dass die Geschwindigkeiten $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ stets sehr kleine Grössen sind, deren Producte und zweite Potenzen fortgelassen werden können. Geschieht dies, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{2Acr}{(A + r^2)^2}\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{rc^2}{(A + r^2)^2} + \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2c}{r(A + r^2)}\frac{dr}{dt} &= \frac{(A + r^2)}{Ar^2} \cdot \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned}\right\}$$

Es werde weiter, ebenfalls mit Maxwell, die Annahme gemacht, dass r nur sehr wenig von einer constanten Grösse u abweicht, dass also in

$$r = u + \varrho$$

ϱ stets eine kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen fortgelassen werden können, und dass dasselbe von φ gilt, durch passende Wahl der Anfangsrichtung aber nur dann erreicht werden kann, wenn sich die Bewegung innerhalb eines sehr kleinen Bezirkes abspielt. $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ ist in den folgenden Anwendungen schon von der Ordnung der ϱ und φ klein und demzufolge vereinfachen sich die obigen Differentialgleichungen und nehmen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \frac{2Acu}{(A+u^2)^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{uc^2}{(A+u^2)^2} \\ &+ \frac{\varrho c^2}{(A+u^2)^3}(A-3u^2) + \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2c}{u(A+u^2)} \frac{d\varrho}{dt} &= \frac{R+S}{R} \cdot \frac{A+u^2}{Au^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Man sieht indessen, dass diese Gleichungen, selbst wenn alle anderen Voraussetzungen zugelassen werden, gewiss nicht mehr der Wahrheit nahekommen, wenn $A\,u^2$ sehr klein ist. Diese Fälle müssen also von vornherein ausgeschlossen werden. Sobald also A oder u klein werden, gelten die Maxwell-schen Gleichungen — denn im Wesen der Sache stimmen diese mit den obigen überein — gewiss nicht mehr. Die obigen Gleichungen sind nun stets, da man sich V in eine Potenzreihe nach den Grössen ϱ und φ entwickelt denken kann und nur die linearen Glieder mitzunehmen braucht, ohne im Allgemeinen neue Ungenauigkeiten einzuführen, lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und ihre Integration gelingt in bekannter Weise durch Exponentialfunctionen. Allgemeinere Fälle durchzuführen macht demnach keine Schwierigkeiten. Es soll hier nur der von Maxwell ganz durchgerechnete Fall vorgenommen werden, dass ein unendlich dünner Kreisring mit dem Radius a vorliegt, welcher in einem Punkte mit der Masse m beschwert ist.

Als die mit dem Ringe fest verbundene Richtung wählen wir dann die Gerade, welche durch m und den Ringmittelpunkt geht. Steht S genau im letzteren, so ist $r = u$, $\varphi = 0$. Der Einfachheit wegen werde noch die Masse des Ringes R gegen S vernachlässigt. Dann findet sich leicht, wenn zur Abkürzung $\mu = \frac{m}{R}$ gesetzt wird

$$A = a^2 (1 - \mu^2); \quad u^2 = a^2 \mu^2; \quad A + u^2 = a^2$$

Das Potential V ergiebt sich mit Rücksicht auf die oben ausgeführte Transformation, wenn noch σ die Entfernung zwischen S und dem Ringcentrum, also

$$\sigma^2 = r^2 + u^2 - 2\, u\, r \cos \varphi$$

ist

$$V = \frac{2\,(R - m)\, k^2}{\pi\, a} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,u}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{a^2} \sin^2 u}} + \frac{m\, k^2}{\sqrt{r^2 + (a - u)^2 + 2\,(a - u)\, r \cos \varphi}}$$

Entwickelt man nach Potenzen von $\varrho = r - u$ und φ und nimmt nur die ersten Potenzen mit, so ergiebt sich leicht:

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{m}{a^2} + \frac{\varrho}{2\, a^3} (R + 3\, m)$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{3}{2} \frac{m}{a} \mu\, (1 - \mu) \cdot \varphi$$

und hiermit werden die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 \varrho}{d\, t^2} + \frac{2\, c\, \mu\, (1 - \mu^2)}{a} \cdot \frac{d\, \varphi}{d\, t} \\ &= \frac{c^2 \mu}{a^3} + \frac{\varrho\, c^2}{a^4} (1 - 4\, \mu^2) + \frac{k^2 S}{R} \left[-\frac{m}{a^2} + \frac{\varrho}{a^3} \frac{R}{2} (1 + 3\, \mu) \right] \\ &\frac{d^2 \varphi}{d\, t^2} - \frac{2\, c}{a^3\, \mu} \cdot \frac{d\, \varrho}{d\, t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2 S}{R} \cdot \frac{m}{a^3} \cdot \frac{1}{\mu\, (1 + \mu)} \cdot \varphi \end{aligned}\right\}$$

Die Integrations-Constante c ist vollkommen willkürlich und die weitere Rechnung führt nur dann auf das Maxwell-sche Resultat, wenn noch eine weitere Annahme gemacht wird, nämlich die, dass für $\varrho = 0$, $\varphi = 0$ eine Gleichgewichtslage überhaupt stattfindet. Diese Annahme ist aber keineswegs selbstverständlich. Diese an sich willkürliche Annahme spricht sich in der Gleichung

$$c^2 = k^2 S a \tag{5}$$

aus. In diesem Falle nun werden die obigen Differentialgleichungen überaus einfach. Setzt man zur Abkürzung

$$p = \frac{2 c \mu (1 - \mu^2)}{a} \qquad \beta = \frac{c^2}{a^4}\left\{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mu - 4\mu^2\right\}$$

$$p' = \frac{2c}{a^3 \mu} \qquad \gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2}{a^4} \cdot \frac{1}{1+\mu}$$

so wird:

$$\frac{d^2 \varrho}{d t^2} + p \frac{d \varphi}{d t} = \beta \varrho$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} - p' \frac{d \varrho}{d t} = \gamma \varphi$$

Zur Integration macht man bekanntlich den Ansatz:

$$\varrho = \lambda e^{\nu t} \qquad \varphi = \mu e^{\nu t}$$

dann muss sein:

$$\lambda \nu^2 + p \mu \nu = \beta \lambda$$
$$\mu \nu^2 - p' \lambda \nu = \gamma \mu$$

Die Elimination von λ und μ ergiebt sofort:

$$\nu^4 - \nu^2 (\beta + \gamma - p p') = - \beta \gamma \tag{6}$$

Durch Auflösung dieser in ν^2 quadratischen Gleichung und durch Ausrechnung der zu den Wurzelwerthen von ν gehörenden $\frac{\lambda}{\mu}$ kann man leicht, wie bekannt, die allgemeinen

Lösungen der vorliegenden Differentialgleichungen erhalten. Die Frage, welche hier vorliegt, ist aber, wann diese Lösungen sich durch Sinus- und Cosinusfunctionen von t ausdrücken. Dies tritt offenbar ein, wenn (6) für ν^2 reelle und negative Werthe ergiebt. Die Auflösung von (6) giebt hierfür als nothwendige und hinreichende Bedingungen:

$$\beta\gamma > 0, \beta + \gamma - pp' < 0 \text{ und } (\beta + \gamma - pp')^2 > 4\beta\gamma$$

Die erste Bedingung heisst:

$$1 + \mu > \frac{8}{3}\mu^2$$

woraus folgt:

$$16\mu < 3 + \sqrt{105}, \text{ d. h. } \mu < 0.8279$$

Die weitere Bedingung

$$\mu^2 - \frac{2}{3}\mu < \frac{2}{3}$$

ist für $\mu < 1$ von selbst erfüllt. Die dritte Bedingung schliesslich giebt:

$$\mu^4 + \frac{28}{3}\mu^3 + \frac{52}{9}\mu^2 - \frac{64}{9}\mu > \frac{32}{9}$$

was aussagt $\mu > 0.8159$.

Die angestellte Rechnung, welche mit dem Maxwell'schen Resultate vollkommen übereinstimmt, zeigt also, dass $\mu = \frac{m}{R}$ zwischen den Grenzen 0.8159 und 0.8279 liegen muss, damit die Bewegung rein periodisch sei, in welchem Falle also S immer in der Nähe vom Ringmittelpunkt bleibt, wenn dies zu einer bestimmten Zeit der Fall war und die Geschwindigkeiten zu derselben Zeit sehr klein waren. Dies gilt aber nur, wenn die Gleichung (5) streng erfüllt ist. Ist dies nicht der Fall, so finden sich andere Grenzwerthe für μ, und

man kann solche Werthe von c wählen, dass überhaupt keine periodischen Lösungen mehr möglich sind. Ich gehe auf diese Entwicklungen nicht näher ein, weil ich der Meinung bin, dass die Maxwell'sche Integrationsmethode, wenigstens in dieser Form, überhaupt nicht geeignet ist, über die Stabilität der untersuchten Bewegung etwas auszusagen. Mir scheint es unzulässig zu sein, in Differentialgleichungen von der vorliegenden Form die Glieder höherer Ordnung fortzulassen und aus der Thatsache, dass sich dann eine rein periodische Lösung ergiebt, schliessen zu wollen, dass dies auch bei strenger Integration der Fall sei. Die Untersuchung der Stabilität eines Zustandes hat von der Bedingung auszugehen, dass die Coordinaten und Geschwindigkeiten für eine bestimmte Zeit unendlich wenig geändert werden. Man hat also die Integrationsconstanten zu variiren. Bei Maxwell kommen diese Constanten gar nicht vor, vielmehr werden die Veränderungen der Coordinaten als unendlich klein für alle Zeiten betrachtet und mit Hülfe der Vernachlässigung der höheren Potenzen dieser Grössen nachgewiesen, wann eine periodische Bewegung mit sehr kleinen Amplituden sich einstellt. Im Allgemeinen enthält dieses Verfahren unzweifelhaft einen Zirkelschluss und ist unzulässig und daran wird nichts geändert, wenn dasselbe auch in speciellen Fällen zu richtigen Resultaten zu führen geeignet ist. Ein auf diesem Wege gefundenes Resultat kann, wenn nicht die Zulässigkeit des Verfahrens zuerst in besonderen Fällen nachgewiesen wird, eben nur zufällig richtig zu sein.

Die vorliegenden Differentialgleichungen 2. Ordnung enthalten die unabhängige Variable t nicht explicite. Dass aber auch in diesem Falle im Allgemeinen die Maxwell'sche Schlussfolgerung nicht zulässig ist, kann mit Leichtigkeit an beliebig vielen Beispielen gezeigt werden. Nehmen wir z. B.:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - q^2 x + y^2$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{q^2}{4} y$$

und es werde vorausgesetzt, wie in den obigen Gleichungen, dass sowohl x und y als auch die ersten Differentialquotienten nach t für $t = 0$ sehr klein seien. Dann ergiebt die strenge Integration:

$$y = a \sin \left(\frac{q}{2} t + \frac{b}{2} \right)$$

$$x = \frac{a^2}{2 q^2} + \alpha \sin (q t + \beta) + \frac{a^2}{8 q^2} \cos (q t + b)$$
$$- \frac{a^2}{4 q} \cdot t \cdot \sin (q t + b)$$

worin a, α, b, β die 4 willkürlichen Integrationsconstanten sind und die ersten beiden sehr klein sein müssen. Vernachlässigt man aber in den Gleichungen y^2, so wird:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - q^2 x \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = - \frac{q^2}{4} y$$

also

$$x = \alpha \sin (q t + \beta) \qquad y = a \sin \left(\frac{q}{2} t + b \right)$$

Die näherungsweise ausgeführte Integration giebt also eine rein periodische Bewegung mit sehr kleinen Amplituden, die strenge Darstellung dagegen enthält ein mit t multiplicirtes Glied. Wie sich die Sachlage bei dem Maxwell'schen Problem über den Saturnring gestaltet, darüber ist vorläufig gar nichts bekannt. Keineswegs aber kann man ohne näheren Nachweis behaupten, dass dort die Fortlassung der höheren Potenzen der Variablen die Form der Integralgleichungen ungeändert lässt.

Danach wird man wohl zugeben müssen, dass das Maxwell'sche Resultat, in der vorliegenden Form wenigstens,

gänzlich unbegründet ist. Die vorliegende astronomische Frage scheint mir aber hiervon ganz unabhängig zu sein. Denn es ist sicher, dass die thatsächlichen Verhältnisse beim Saturnring völlig verschieden sind von den Annahmen, auf denen das Maxwell'sche Problem beruht. Der Saturnring ist ein sehr dünnes aber breites Gebilde und der Augenschein lehrt, dass dasselbe im Grossen und Ganzen in peripherischer Richtung von homogener Dichtigkeit ist. Wenn man sich den Ring auch vorstellen will als bestehend aus sehr vielen, sehr dünnen und sehr inhomogenen Ringen, so werden sich doch diese Ungleichförmigkeiten in der Massenvertheilung der einzelnen Ringe nahezu compensiren müssen, so dass man sich offenbar weit mehr der Wahrheit nähert, wenn man den ganzen Ring als homogen betrachtet, als wenn man etwas anderes annimmt. Hierdurch entsteht aber, wie oben auseinandergesetzt wurde, eine im hohen Grade instabile Bewegung und man wird diese mit viel mehr Recht als der Natur entsprechend ansehen können, als etwa die Consequenzen des Maxwell'schen Problemes.

Hirn's Untersuchung der Frage, ob die Saturnringe als fest anzunehmen seien, geht nach einer ganz anderen Richtung als die Maxwell'sche Arbeit. Während letzterer versuchte die Dauerhaftigkeit der Bewegung des Saturn um das Ringcentrum zu untersuchen, beschäftigt sich Hirn mit den Ansprüchen, welche man an die Festigkeit der Ringe zu machen gezwungen ist, falls diese als fest angenommen werden. Hierbei scheint Hirn von der Meinung auszugehen, dass ein nicht homogener Ring überhaupt einen stabilen Zustand zulasse d. h. dass sich Saturn stets in der Nähe des Ringcentrums aufhalten könne. Er stützt sich dabei auf Laplace, der allerdings in der Mécanique céleste seine Untersuchungen über den Saturnring mit der Bemerkung schliesst: „les divers anneaux qui entourent le globe de Saturne sont par conséquent

des solides irregulaires d'une lageur inégales etc.". Diese Schlussfolgerung ist aber durch die vorangehende Analyse keineswegs gerechtfertigt, denn Laplace hat nur die Bewegung homogener Ringe untersucht. Deshalb entbehren die auf Laplace's Meinung sich stützenden Bemerkungen Hirn's der sicheren Grundlage und müssen als wenig beweiskräftig angesehen werden. Jedoch enthält die Schrift Hirn's viele interessante Bemerkungen, weshalb ich auf eine kurze Analyse derselben eingehe.

Ein unendlich dünner Kreisring mit dem Radius r, der sich mit der Rotationsgeschwindigkeit ω um den in seinem Mittelpunkt stehenden Saturn dreht, kann, wenn keine Cohäsion zwischen den einzelnen Theilen stattfindet, nur bestehen, wenn in jedem Punkte die Centrifugalkraft gleich der Anziehungskraft ist. Ist also wieder k die Anziehungsconstante, S die Saturnmasse, so muss sein:

$$\omega^2 = \frac{k^2 S}{r^3}$$

Es werde nun ein inhomogener und zwar einseitig belasteter unendlich dünner Kreisring betrachtet. Ein Massenelement desselben sei dm. Der Schwerpunkt R des Ringes fällt dann nicht mit seinem Centrum C zusammen. Hirn nimmt nun an, was eine durchaus willkürliche und unbewiesene Voraussetzung ist, dass durch die Stellung des Saturn S auf der Verbindungslinie CR ein stabiler Zustand gegeben sei. Es müsste also, da die Masse R gegen S zu vernachlässigen ist, R um S rotiren und ebenso schnell um C. Nennt man noch ϑ den Winkel, den der durch dm gehende Kreisradius r mit der Geraden RS bildet, so wird also bei Voraussetzung eines stabilen Zustandes die Entfernung $RS = \varrho$ constant bleiben, also:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d^2\varrho}{dt^2} = 0$$

sein. Dies führt sofort auf die Bedingung

$$\frac{d^2 \varrho}{d t^2} \Sigma dm = \Sigma dm \cos \vartheta \left\{ \omega^2 r - \frac{k^2 S}{r^2} \right\} = 0. \quad (7)$$

Hierin erstreckt sich Σ auf die ganze Ringmasse. Nennt man den positiven Theil der linken Seite der letzten Gleichung f, so halten sich also zwei Kräfte $+f$ und $-f$ das Gleichgewicht. Es ist f nichts anderes als die Zug- bezw. Druckkraft, welche bei dem bestehenden Zustand auftritt. In der Hauptsache (mit allerdings nicht bedeutenden Abänderungen in den Zahlen) kann man die auftretenden Fälle als durch folgende typische Annahmen hergestellt ansehen.

Die ganze Ringmasse denke man sich in zwei Massenpunkten m_0 und m_1 vereinigt. In m_0 alle dm, welche in der obigen Summe positive, in m_1 alle dm, welche negative Coefficienten haben. Man denke sich ferner m_0 und m_1 an die Enden eines Durchmessers des Ringes gebracht, in welchem Durchmesser sich auch S befindet. Die Enfernung S vom Centrum des Ringes, also der Mitte der Geraden $m_0\, m_1$, sei in der Richtung nach m_0 positiv gerechnet e. Die Gleichung (7) wird jetzt

$$m_0 \left[\omega^2 (r - e) - \frac{k^2 S}{(r - e)^2} \right] = m_1 \left[\omega^2 (r + e) - \frac{k^2 S}{(r + e)^2} \right]$$

Setzt man $\lambda = \frac{m_0}{m_1}$, so findet man hieraus:

$$\omega = \frac{1}{r - e} \sqrt{\frac{k^2 S}{r - e} \cdot \frac{\lambda - \left(\frac{r - e}{r + e}\right)^2}{\lambda - \frac{r + e}{r - e}}}$$

Es ergiebt sich aus diesem Ausdrucke, dass der angenommene Zustand unmöglich ist, wenn:

$$\left(\frac{r - e}{r + e}\right)^2 < \lambda < \frac{r + e}{r - e}$$

denn dann wird ω imaginär. Sonst aber wird die Kraft f, welche die feste als schwerelos betrachtete starre Verbindung von m_0 und m_1 zu zerreissen oder zusammenzudrücken strebt, sein:

$$f = m_0 \left[\omega^2 (r - e) - \frac{k^2 S}{(r - e)^2} \right]$$

Diese Kraft kann sehr bedeutend werden. Wenn man den oben gefundenen Werth von ω einsetzt und die zweiten Potenzen der als klein vorausgesetzten Grösse $\frac{e}{r}$ vernachlässigt, findet man leicht:

$$f = \frac{6 k^2 S}{r^3} \cdot \frac{m_0 e}{\lambda - 1}$$

Für die numerische Rechnung wird man die Intensität der Schwere auf der Erdoberfläche g, den Erdradius ϱ und die Erdmasse m einführen. Dann ist $m k^2 = g \varrho^2$ und:

$$f = \frac{6}{\lambda - 1} m_0 g \frac{S}{m} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \frac{e}{r}$$

Will man nun diese Formel auf den Saturnring anwenden, so wird, ausser den bereits erwähnten und als ziemlich willkürlich bezeichneten Voraussetzungen, noch eine bestimmte Annahme über e gemacht werden müssen, da f bei sehr kleinem e ebenfalls sehr klein wird. Hirn stützt sich hierbei auf Beobachtungen von W. Struve, Harding u. s. f., wonach Saturn excentrisch im Ringe stehen soll. Aehnliche Wahrnehmungen sind auch in neuerer Zeit gemacht worden, entschieden ist indessen diese Frage noch keineswegs. Dass eine excentrische Stellung des Saturn thatsächlich vorgekommen ist, wird man zwar zugeben müssen, über den Betrag der Excentricität aber bestimmte Angaben zu machen, ist bei den einander widerstreitenden Einzelresultaten vorder-

hand noch nicht möglich. Wesentlich ist ferner für die Anwendung der obigen Formel, dass Saturn die Rotation des Ringes um sein Centrum mitmacht und immer auf einem Radius des letzteren und zwar an derselben Stelle zu liegen kommt. Dies durch die Beobachtungen gegenwärtig nachzuweisen dürfte nicht leicht sein, jedenfalls liegen dergleichen Resultate nicht vor.

Hirn legt seiner Rechnung folgende Zahlen zu Grunde. Drückt man die Strecken in lieues zu 4000 Metern aus, so setzt er:

$$e = 200 \qquad r = 33454$$

wo die letztere Zahl dem äussersten hellen Ringrand entspricht. Weiter wird angenommen $\frac{S}{m} = 92.394$. Dann wird für $\lambda = 10$

$$f = m_0\, g \times 0.00084$$

Schon für kleine Massen kommen bedeutende Drucke heraus. Nimmt man z. B. an, dass m_0, welches ungefähr der Masse des halben Ringes entspricht, die Masse einer Kubiklieue Wasserstoff ist, so ergiebt sich $f = 5$ Millionen Kilogramm. Unter solchen Drucken würde aber jedenfalls ein aus so dünnem Stoffe bestehender Ring auseinanderbrechen müssen. Wollte man aber die Festigkeit so gross annehmen, dass diesen Drucken Widerstand geleistet werden könnte, so müsste man noch die Bedingung der beinahe vollständigen Starrheit hinzufügen. Denn sonst würden sehr bedeutende Verbiegungen auftreten müssen, von deren Qualität man sich leicht Rechenschaft abgeben kann. Da aber die Beobachtungen dergleichen nicht verrathen, so muss man wohl, will man nicht mit ganz abnormen und unbekannten Verhältnissen rechnen, die Hypothese sehr dünner starrer Ringe aufgeben.

Es bliebe indessen noch übrig, den Saturnring als ein oder mehrere sehr dünne Bänder von endlicher Breite auf-

zufassen. Ein solches kreisförmiges Band habe am inneren bezw. am äusseren Rande die Radien r_i und r_a. Jeder als fest angenommene Theil des Bandes, welcher zwischen zwei den unendlich kleinen Winkel $\delta\theta$ mit einander bildenden Radien liegt, wird mit den übrigen zusammen auch ohne Cohäsion die vorgeschriebene Rotation ausführen, wenn

$$\int_{r_i}^{r_a} dm \left[\omega^2 r - \frac{k^2 S}{r^2}\right] = 0.$$

Bezeichnet e die sehr kleine Dicke des Ringes und δ die gleichförmige Dichtigkeit, so ist

$$dm = e \cdot \delta \cdot r \cdot dr \cdot \delta\theta$$

und es müsste also sein:

$$\int_{r_i}^{r_a} \left[\omega^2 r - \frac{k^2 S}{r^2}\right] e r \cdot dr = 0.$$

e ist im Allgemeinen eine Function von r, die aber völlig unbekannt ist. Hirn verfolgt ausführlicher zwei Annahmen: 1) Setzt man $e = e_0 =$ constant, so ergiebt sich:

$$\omega^2 = \frac{3 k^2 S}{r_a^3 - r_i^3} \cdot \log \frac{r_a}{r_i}$$

Es giebt einen mittleren Radius r_m, wo der Centrifugalkraft genau durch die Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird. Hierfür ist

$$\omega^2 r_m^3 = k^2 S$$

woraus sich ergiebt:

$$r_m = r_i \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 - 1}{3 \log \frac{r_a}{r_i}}}$$

2) Man kann u. A. annehmen $e\,r = \text{Const.}$ e entspricht dann der Ordinate einer gleichseitigen Hyperbel, deren Abscisse r ist. Dann findet sich leicht:

$$\omega^2 = \frac{2\,k^2\,S}{r_i\,r_a\,(r_i + r_a)}$$

und

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{r_i\,r_a\,(r_i + r_a)}{2}}$$

Hirn setzt entsprechend der Begrenzung des inneren Theiles des hellen Ringes, vom Florring bis zur Cassini'schen Linie, in lieues zu 4000 Meter:

$$r_i = 23670 \qquad r_a = 30599$$

Dann ergiebt die erste Annahme $r_m = 27134$ und die zweite 26986, also wie zu erwarten nahe übereinstimmende Werthe.

Offenbar überwiegt bei jenen Ringtheilen, für welche $r > r_m$, die Centrifugalkraft die Anziehung und für $r < r_m$ findet das Entgegengesetzte statt. Die auftretenden Zugkräfte werden also dahin streben bei r_m eine Theilung des Ringes herbeizuführen. Diese Zugkraft f wirkt längs der Fläche von der Höhe e_m, in welcher der mit dem Radius r_m construirte Kreiscylinder die Ringmasse schneidet. Auf die Flächeneinheit bezogen wird demgemäss f ausgedrückt durch:

$$f = \frac{1}{r_m\,\delta\,\theta} \cdot \int\limits_{r_i}^{r_m} \frac{d\,m}{e_m}\left(\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right)$$

oder

$$f = \frac{\delta}{r_m} \cdot \int\limits_{r_i}^{r_m} \frac{e\,r\,d\,r}{e_m}\left(\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{\delta}{r_m} \cdot \int\limits_{r_m}^{r_a} \frac{e\,r\,d\,r}{e_m}\left(\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right)$$

Führt man hierin wieder die beiden oben verfolgten Annahmen durch und setzt zuerst $e = e_m$, so wird

$$f = \frac{k^2 S \cdot \delta}{r_m} \cdot \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(\frac{r_a}{r_m} \right)^2 - 1 \right] - \log \frac{r_a}{r_m} \right\}$$

Durch Einführung der Schwere g und mit den obigen Zahlen ergiebt sich:

$$f = 845911 \cdot \delta \cdot g$$

Die analoge Rechnung für die zweite Annahme $er = \text{Const.}$ ergiebt:

$$f = \frac{k^2 S \delta}{r_m} (r_a - r_m) \left\{ \frac{1}{2} \frac{r_a + r_m}{r_m^2} - \frac{1}{r_a} \right\}$$

und in Zahlen $f = 859258 \cdot \delta \cdot g \cdot$

Die angestellten Rechnungen zeigen jedenfalls, dass sehr bedeutende Zugkräfte die Zertheilung des ringförmigen Bandes herbeizuführen suchen, denen nur die Cohäsion der Masse sich entgegensetzt. Indessen wirkt auch die Anziehung der einzelnen Ringtheile auf einander in gleichem Sinne. Man wird aber wohl von vorn herein annehmen müssen, dass die letztere bei der nicht bedeutenden Dichtigkeit der Ringmaterie nicht viel an dem erlangten Resultate ändern wird. Ich übergehe deshalb die von Hirn in dieser Richtung ausgeführten Betrachtungen, zumal dieselben gegenwärtig vollkommener angestellt werden können, als dort geschehen. Hirn findet, dass bei Berücksichtigung der Ringanziehung der zuletzt angeführte Zahlenausdruck für f sich umwandelt in:

$$f = 859258 \cdot \delta \cdot g - 0.57 \, (\delta \cdot g)^2$$

Um eine genauere Vorstellung von der Grösse dieser Kräfte zu erlangen, sei erwähnt, dass Buchenholz ein Körper ist, der bei grösster Leichtigkeit die stärksten Drucke aushalten kann. Hierfür ist $\delta = 0.7$ und damit wird $f = 598687600$ kg pro qm. Diese Belastung ist etwa 40 Mal so gross, als Buchenholz erfahrungsgemäss ertragen kann. Indessen ist offenbar

die Kraft f bedeutend kleiner, wenn die Breite des Ringes abnimmt, und man kann sich die Frage vorlegen, wie breit die einzelnen Ringe sein müssen, um bei gegebener Festigkeit bestehen zu können. Die Rechnung ist leicht auszuführen, wenn die Ringanziehung vernachlässigt wird. Für eine Materie von der Beschaffenheit des Buchenholzes folgt dann, dass der innere helle Ring mindestens aus 5 einzelnen Ringen bestehen müsste. Ganz ähnliches gilt natürlich auch für den äusseren Ring, so dass also mit der festen Constitution der Ringe die Folgerung verknüpft ist, dass dieselben aus einer grösseren Zahl schmaler Ringe bestehen müssen. Der Augenschein und manche Beobachtungen, namentlich aus früherer Zeit, widersprechen dem durchaus nicht, und es ist bekannt, dass Laplace etwas ganz ähnliches als durch die Beobachtungen bestätigt angenommen und hierauf seine Rechnungen gegründet hat.

So interessant dieses Resultat von Hirn auch ist, so ändert es doch nichts an der Unzulänglichkeit der Annahmen. Der der Rechnung zu Grunde gelegte Zustand ist ein im höchsten Grade instabiler, wie oben auseinandergesetzt, und demzufolge ist die Untersuchung über die Unmöglichkeit fester Ringe unnöthig, weil das System nur ganz kurze Zeit bestehen kann. Es ist schon oben erwähnt worden, dass auch einseitige Belastungen nichts an der Sachlage ändern können, wenn man nicht das Aussehen der Saturnringe ganz ignoriren will und so wird wohl immer das Hauptargument gegen die Möglichkeit fester Ringe in den einfachen Rechnungen bestehen, welche am Anfange dieses Aufsatzes ausgeführt worden sind.

Frägt man nun weiter nach der eigentlichen Constitution der Ringe, nachdem der feste Aggregatzustand ausgeschlossen ist, so drängt sich zunächst die Vermuthung auf, diese Gebilde könnten flüssiger oder gasförmiger Natur sein. Um die Mitte dieses Jahrhunderts hatte diese Hypothese an den beiden amerikanischen Gelehrten W. C. Bond und Peirce

energische Verfechter gefunden, man wird sie aber trotzdem nicht ernstlich in Betracht zu ziehen haben. Lange Zeit und vereinzelt auch jetzt noch hat man die berühmten Experimente von Plateau über ringförmige Gebilde, die in rotirenden Flüssigkeiten auftreten, als einen Beweis für die Möglichkeit solcher kosmischen Gebilde angesehen. Diese Versuche veranschaulichen aber nur die Wirkung der Capillarität und haben mit Gravitationswirkungen gar nichts zu schaffen. Sie hängen also gar nicht mit den Gleichgewichtsfiguren kosmischer Massen zusammen, ganz abgesehen davon, dass sie auch äusserlich den Verhältnissen beim Saturnring nicht entsprechen. Denn hier liegt in der Mitte der Ringe von sehr geringer Masse, die bedeutende Saturnmasse, welcher Fall sich bei den genannten Figuren wohl kaum erzielen lässt.

Nachdem Laplace die Theorie der ringförmigen Gleichgewichtsfiguren zu untersuchen begonnen hatte, ist dieses Problem ausführlich und streng von verschiedenen Seiten behandelt worden. Die Hauptfrage, die aber bei einer Verwerthung der erlangten Resultate in der Astronomie von der grössten Wichtigkeit ist, ob nämlich solche Figuren stabil sind und nicht durch Hinzutritt kleiner Störungen von aussen auseinanderfliessen, hat eine genügende Beantwortung bis jetzt nicht gefunden, indessen ist kaum wahrscheinlich, dass die erforderliche Stabilität vorhanden ist. Zu diesem Resultate kommt auch Hirn auf einem interessanten Wege, auf welchem ihm hier gefolgt werden soll.

Es werde angenommen, dass zu einer gewissen Zeit der flüssige Ring wirklich bestehe, wenn Saturn genau in dessen Centrum sich befindet. Dann wird der Ring mit gleichförmiger Geschwindigkeit wie ein fester Körper um sein Centrum rotiren und die einzelnen Theilchen werden keine Verschiebung gegen einander erleiden. Wenn nun Saturn sich aus irgend einer Ursache von dem Ringmittelpunkt ein wenig entfernt, so werden die einzelnen Theilchen nicht

mehr gleichförmig rotiren können. Dort wo sie dem Saturn näher stehen, werden sie sich schneller, dort wo sie von ihm entfernter sind, werden sie sich langsamer bewegen müssen. Man wird sich, weil die Anziehung des Ringes auf seine einzelnen Theile gering ist gegenüber der Anziehung des Saturn, ein näherungsweise richtiges Bild von der Bewegung bilden, wenn man annimmt, dass die einzelnen Theile Ellipsen beschreiben, deren Brennpunkt im Saturn liegt. Ist die Ringmaterie ein zusammendrückbares Gas, so werden die einzelnen Theilchen in der Saturnnähe, da sie sich hier schneller bewegen, auseinanderrücken und in der Saturnferne wird das Entgegengesetzte eintreten. Ist der Ring aus einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit gebildet, so werden sich die einzelnen Theilchen im letzteren Punkte anhäufen un der Ring wird hier breiter oder dicker werden müssen. Dieses Spiel wiederholt sich bei jedem Umlaufe, also alle 10 bis 14 Stunden. Infolge der Reibung zwischen den einzelnen Theilchen wird beim Anhäufen oder Zusammendrängen der Theilchen Wärme erzeugt werden, was aber in der Saturnferne stattfinden muss, während, wenigstens ist dies bei gasförmiger Constitution sicher, in der Saturnnähe eine Abkühlung erfolgen wird. Infolge der Wärmeleitung, des Stosses der einzelnen Theilchen gegeneinander etc., werden nun, wie die Thermodynamik zeigt, sich die Wärmewirkungen in der Saturnferne und -Nähe und auch in den dazwischen liegenden Punkten nicht ausgleichen, vielmehr bleibt ein Rest übrig, welcher eine Temperaturerhöhung der Ringmasse hervorbringt. Dies kann aber nur auf Kosten der Bewegungsenergie geschehen und es werden sich also die Dimensionen des Ringes nach dem Saturn hin verkleinern. Die Innenseite des Ringes wird sich demzufolge ziemlich gleichmässig von allen Seiten, langsam dem Saturn nähern, um sich schliesslich mit ihm zu vereinigen.

Auf Grund seiner Untersuchungen kommt Hirn zu dem

Resultate, dass sich alle Schwierigkeiten und Unmöglichkeiten heben, wenn man annimmt, der Saturnring bestehe aus einzelnen discreten Massentheilchen oder er sei, kurz gesagt, von staubförmiger Structur. Wie sich die mechanischen Verhältnisse in einem solchen Systeme abwickeln, hat Hirn nicht weiter untersucht und die kurzen Bemerkungen, die er in dieser Richtung macht, werden voraussichtlich theilweise der Correctur bedürfen. Dagegen hat Maxwell diese Probleme in Angriff zu nehmen versucht, ohne dass es ihm aber, wie ich glaube, gelungen ist, zu einer einwurfsfreien Lösung zu gelangen.

Die Erscheinungen, welche ein staubförmiger Saturnring darbietet, habe ich in zwei grösseren Arbeiten besprochen und ich glaube dort den stricten Nachweis geliefert zu haben, dass alle Erscheinungen, die zum Theil sehr complexer Natur sind, nur durch die zu Grunde gelegte Annahme erklärt werden können. Bei dem noch nicht gehörig entwickelten Zustande der Dynamik des Saturnringes dürfte auf diesem Wege die festeste Stütze gewonnen sein, die man bis jetzt der Maxwell-Hirn'schen Annahme geben konnte.

Es ist interessant, dass die Forschung, nachdem der Reihe nach alle nur denkbaren Annahmen über die Constitution des Saturnringes discutirt und als wahrscheinlich hingestellt worden sind, wieder jener Ansicht zuneigt, welche als eine der ersten aufgestellt worden ist, um dann aber, wie es scheint, völlig der Vergessenheit zu verfallen. Es ist von verschiedenen Seiten bemerkt worden, dass Jacques Cassini (1677—1756) bereits die Maxwell-Hirn'sche Ansicht ausgesprochen hat. Die Wichtigkeit der Angelegenheit wird es wohl rechtfertigen, wenn ihr etwas nachgegangen wird. Bei Gelegenheit der Veröffentlichung seiner Beobachtungen des Saturn, namentlich des Verschwindens des Ringes im Jahre 1715 [1]) spricht sich Cassini ganz deutlich aus. Pag. 47 sagt er:

---

1) Observations nouvelles sur Saturne. Mémoires de mathematique et de physique, tirés des registres de l'académie royale des sciences de l'année 1715 pg. 41 ff.

„Cette apparence qui n'a point sa pareille dans les corps célestes, a donné lieu de conjecturer que ce pouvait être un amas de satellites qui étaient dans le plan des autres et faisaient leur révolution autour de cette planète, que leur grandeur est si petite qu'on ne peut pas les apercevoir chacun séparément, mais qu'ils sont en même temps si près l'un de l'autre qu'on ne peut point distinguer les intervalles qui sont entr'eux, ensorte qu'ils paraissent former un corps continu".

Hieran werden Bemerkungen geknüpft über Schwierigkeiten, die bei der Darstellung der Beobachtungen auftreten sollen, in dieser Form aber wohl nicht existiren. Den Schluss bildet (pg. 48) die Bemerkung:

„On peut donc supposer avec beaucoup de vraisemblance que l'anneau de Saturne est formé d'une infinité de petites Planètes fort près l'une de l'autre, qui étant comprises dans son Atmosphère, sont entraînés par le mouvement qui fait tourner Saturne autour de son centre et que dans cette Atmosphère etc."

Hiernach nimmt also Cassini an, dass die discreten Theilchen, welche den Ring bilden, in der Atmosphäre des Saturn sich befinden und mit dieser durch die Rotation des Saturn herumgeführt werden. Das ist freilich ein Zusatz, welcher die ganze Auffassung völlig verschiebt, und da Cassini diesen Zusatz für ganz wesentlich hält, steht er doch auf wesentlich anderem Boden als auf dem der Hypothese von Maxwell und Hirn. Es erscheint demnach doch nicht so räthselhaft, dass die Cassini'sche Ansicht nicht allgemeine Verbreitung gefunden hat.

Danach wird man, wie ich glaube, nicht gegen die historische Gerechtigkeit verstossen, wenn man die Erkenntniss, dass die Saturnringe eine staubförmige Constitution haben, an die Namen Maxwell und Hirn knüpft.

Ueber normale und anomale Dispersion elektrischer Wellen.

Von L. Graetz und L. Fomm.

(*Eingelaufen 5. Mai.*)

Vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie ist nicht zu erwarten, dass die Dielektrizitätsconstante eines Körpers eine durchaus constante Grösse sei. Denn da ihre Wurzel der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Verschiebung umgekehrt proportional sein soll (bei gleicher magnetischer Inductionsconstante) und da wir aus den optischen Messungen wissen, dass der Brechungsexponent mit der Wellenlänge variirt, so ist von vorn herein zu schliessen, dass sich die Dielektrizitätsconstante eines Körpers abhängig zeigt von der Wellenlänge der elektrischen Bewegungen, durch deren Hülfe sie gefunden wird. Ebensowenig ist aus der Maxwell'schen Theorie mit Nothwendigkeit der (gewöhnlich angeführte) Schluss zu ziehen, dass die Constante der Cauchy-schen oder einer anderen Dispersionsformel (für normale Dispersion) der Wurzel aus der Dielektrizitätsconstante gleich sein muss, ein Schluss, der ja auch durch die Erfahrung nur in wenigen Fällen bestätigt wird. Vielmehr ist aus der Thatsache, dass die Dielektrizitätsconstante, in gewöhnlicher Weise bestimmt, sich meistens viel grösser ergiebt, als das Quadrat des auf unendlich lange Wellen reducirten Brechungsexponenten, consequent nur zu schliessen, dass im Gebiet der langen Wellen häufig Absorptionen und daraus folgende anomale

Dispersionen vorkommen, welche den Gang der Dispersionscurve wesentlich beeinflussen.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, haben wir uns die Frage gestellt, ob eine Abhängigkeit der Dielektrizitätsconstante von der Wellenlänge der elektrischen Wellen experimentell zu constatiren ist. Man weiss von einer Reihe von Körpern, dass ihre Dielektrizitätsconstante, statisch gemessen, sich viel grösser ergiebt, als gemessen durch Schwingungen, auch wenn diese nur die langsamen Schwingungen eines Induktionsapparates sind. Man nahm an, dass man sich dabei durch Abkürzung der Ladungszeit dem wahren d. h. kleinsten Werth der Dielektrizitätsconstante nähert. Nach der obigen Darlegung giebt es aber gar keinen „wahren“ Werth der Dielektrizitätsconstante, vielmehr ist jeder durch einwurfsfreie Methoden sicher bestimmte Werth der Dielektrizitätsconstante als der wahre Werth für die zugehörige Wellenlänge anzusehen. Dass durch die Abkürzung der Ladungszeit man sich dem sogenannten wahren d. h. kleinsten Werth der Dielektrizitätsconstante nicht immer nähert, wird bewiesen durch die Versuche von Lecher[1]), welcher sogar bei raschen Hertz'schen Schwingungen ein Anwachsen der Dielektrizitätsconstante bei einigen Körpern constatirte, gegenüber den durch langsame Schwingungen bestimmten. Man wird vielmehr nach der Ausdrucksweise der Optik sagen müssen, dass, wenn sich die Dielektrizitätsconstante um so kleiner ergiebt, je grösser die angewendete Wellenlänge ist, dass man es dann mit einem Körper mit normaler Dispersion zu thun hat, dass dagegen, wenn umgekehrt die Dielektrizitätsconstante mit wachsender Wellenlänge selbst wächst, in dem hinter diesem Gebiet liegenden Theil der Wellenlängen (nach kürzeren Wellenlängen zu) anomale Dispersionen stattgefunden haben, und

1) Lecher Wied. Ann. 42 p. 142. 1891.

dass endlich, wenn man mit den Wellenlängen in ein Gebiet der anomalen Dispersion selbst kommt, die Dielektrizitätsconstanten mit abnehmender Wellenlänge zunehmen, dann bis zu einem Minimum abnehmen und dann wieder zunehmen müssen.

Bei Körpern, wie Schwefel, Paraffin, Schellack, für welche die gewöhnliche Maxwell'sche Beziehung gilt, ist natürlich eine Abhängigkeit der Dielektrizitätsconstante von der Wellenlänge, wie sie herstellbar ist, nicht zu erwarten. Wohl aber konnte ein solcher Einfluss bei Körpern mit grosser Dielektrizitätsconstante erwartet werden, da die meisten bisher untersuchten Substanzen zu der zweiten der oben erwähnten Klassen zu gehören scheinen. Wir sind aber beim Beryll mit dem von uns benützten Intervall der Wellenlängen gerade in ein Gebiet hineingekommen, welches für die Dielektrizitätsconstante genau denselben Gang zeigt, wie er bei anomaler Dispersion für den Brechungsexponenten in solchen Fällen bekannt ist.

Zu den Messungen benutzten wir die Erscheinung, welche wir früher [1]) ausführlich dargelegt haben, dass dielektrische Ellipsoide in einem von elektrischen Schwingungen durchzogenen homogenen Feld Drehungsbewegungen ausführen, welche dem Quadrat der angewendeten elektrischen Kraft proportional sind. Bei dieser Methode liess sich die Wellenlänge der angewendeten Schwingungen leicht dadurch variiren, dass wir eine Reihe von Leydener Flaschen von verschiedener Capacität anwendeten. Die Entladungsfunken derselben zwischen den Kugeln eines Mikrometers gaben uns Schwingungen, deren Wellenlängen sich nach der Theorie wie die Wurzeln der Capacitäten verhalten, wenn, wie es der Fall war, der ganze übrige Stromkreis möglichst unverändert blieb. Ausserdem konnten wir sehr langsame Schwingungen mit derselben Anordnung dadurch hervorbringen, dass wir die Kugeln des Mikrometers so weit auseinanderzogen, dass keine Funken

1) Graetz und Fomm Sitzungsber. d. bayr. Akad. 23 p. 275. 1893.

übergingen. Dann folgten sich die Schwingungen nur in der Periode, welche der Unterbrecher des Induktionsapparates hatte, einige hundert in der Sekunde.

Die Anordnung war derartig, dass eine der Leydener Flaschen mit den beiden sekundären Polen eines Induktionsapparates verbunden und durch dessen Ströme geladen wurde. Die Entladung geschah durch das Funkenmikrometer, von dessen Kugeln aus zwei Drähte zu zwei parallel geschalteten Kohlrausch'schen Condensatoren führten. Zwischen den Platten derselben hingen an gefirnissten Glasstäbchen die zu untersuchenden Scheiben oder Stäbchen, die durch einen Tropfen Schellack an den Stäbchen befestigt waren. Die Stäbchen selbst hingen an einem Spiegel, dieser an einem feinen Metallfaden, der an einer Ebonitfassung innerhalb einer Glasröhre aufgehängt war. Wenn der Spiegel sorgfältig den Platten des Condensators parallel gestellt wird — was auf optischem Wege jedesmal controllirt wurde —, wird die ganze Aufhängung selbst von den Ladungen nicht beeinflusst. Die Stäbchen und Scheiben wurden sorgfältig so befestigt, dass sie genau unter 45^0 gegen den Spiegel und damit gegen die Condensatorplatten standen. In dem einen der Condensatoren, den wir als Standard bezeichnen, hing zunächst eine dünne Kreisscheibe aus Schwefel, deren Ausschläge uns das Mass für die vorhandene elektrische Kraft gaben. Später wurde für manche Körper ein Kupferstäbchen zum Vergleich genommen. Der Abstand der Condensatorplatten wurde bei beiden Instrumenten gewöhnlich gleich gross gemacht (25 mm, bei grossen Dielektrizitätsconstanten 35 mm).

Theorie der Versuche.

Ein dielektrisches Ellipsoid wird in einem homogenen elektrischen Felde gleichmässig polarisirt. Hat das Ellipsoid die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und wirken in der Richtung der $x\,y\,z$-Axe die inducirenden Kräfte $X\,Y\,Z$, so sind die dielektrischen Momente des Ellipsoids pro Volumeneinheit[1])

$$\alpha = \frac{\varkappa X}{1 + \varkappa A_0} \qquad \beta = \frac{\varkappa Y}{1 + \varkappa B_0} \qquad \gamma = \frac{\varkappa Z}{1 + \varkappa C_0}$$

wo $A_0\,B_0\,C_0$ von dem Verhältniss der Axen abhängige Constanten sind und $\varkappa$ die „Dielektrisirungsconstante" ist, entsprechend der Poisson'schen Magnetisirungsconstanten. Die Dielektrizitätsconstante D ist

$$D = 1 + 4\pi\varkappa.$$

In unserem Fall haben wir ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe die x-Axe sei. Die x- und y-Axe mögen in einer horizontalen Ebene liegen und es möge die elektrische Kraft unseres Feldes den Winkel φ mit der x-Axe bilden (φ ist bei uns nahezu $= 45^0$). Ist P die ganze elektrische Kraft, d. h. die Potentialdifferenz W der Platten dividirt durch ihren Abstand und verläuft P, wie in unserem Falle horizontal, so hat das dielektrische Moment unseres Ellipsoids die Grösse (wenn V das Volumen des Ellipsoids ist)

$$m = \varkappa P V \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(1 + \varkappa A_0)^2} + \frac{\sin^2\varphi}{(1 + \varkappa B_0)^2}}.$$

und die dielektrische Axe bildet mit der x-Axe, der Rotationsaxe, einen Winkel ψ, so dass

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{1 + \varkappa A_0}{1 + \varkappa B_0} \operatorname{tang}\varphi \quad \text{ist.} \qquad \ldots . \, 1)$$

Das Drehungsmoment, welches den Winkel φ zu vergrössern strebt, ist

1) Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizität S. 166.

$$D = -\frac{\varkappa^2 P^2 \sin 2\varphi (B_0 - A_0) V}{(1+\varkappa A_0)(1+\varkappa B_0)}$$

Bei unserer Aufhängung wird bei den Stäbchen der Winkel φ verkleinert, bei den Scheiben vergrössert.

Diesem Drehungsmoment wird, wenn der Winkel φ sich um α verkleinert hat, durch die Torsion des Drahtes das Gleichgewicht gehalten. Ist also M der Torsionscoefficient des Aufhängedrahtes und wird die Grösse $\frac{\alpha}{\cos 2\alpha}$ gleich p gesetzt und zugleich, wie bei unseren Versuchen $2\varphi = \frac{\pi}{2}$ angenommen, so wird

$$2) \ldots\ldots \quad M p = \frac{\varkappa^2 P^2 (B_0 - A_0) V}{(1+\varkappa A_0)(1+\varkappa B_0)}$$

Werden die entsprechenden Grössen für die Standardscheibe mit γ, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}$ bezeichnet und wird

$$\frac{\gamma^2 (\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}_0)\mathfrak{B}}{(1+\gamma \mathfrak{A}_0)(1+\gamma \mathfrak{B}_0)} = s$$

gesetzt, vorausgesetzt, dass γ bekannt ist, so wird

$$3) \ldots \quad \frac{\varkappa^2}{(1+\varkappa A_0)(1+\varkappa B_0)} = \frac{p}{\mathfrak{p}} \frac{M}{\mathfrak{M}} \frac{s}{V(B_0 - A_0)}$$

woraus $\varkappa$ zu bestimmen ist, wenn $\frac{p}{\mathfrak{p}}, \frac{M}{\mathfrak{M}}, V$ gemessen, s, A_0, B_0 berechnet sind.

Die Grösse A_0 und B_0 ergeben sich [1])

1. f ü r e i n e S c h e i b e, wenn a die halbe Rotationsaxe, b die andere Halbaxe ist und $\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} = \varepsilon$ gesetzt wird:

---

1) Kirchhoff Mechanik S. 131.

$$A_0 = 4\pi \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3} \left\{ \varepsilon - arc\,\mathrm{tang}\,\varepsilon \right\}$$

$$B_0 = \frac{2\pi}{\varepsilon^3} \left\{ (1+\varepsilon^2)\, arc\,\mathrm{tang}\,\varepsilon - \varepsilon \right\}$$

2. für ein Stäbchen bei derselben Bezeichnung der Halbaxen, wenn $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \eta$ gesetzt wird

$$A_0 = -4\pi \frac{1-\eta^2}{\eta^3} \left\{ \left(\log \mathrm{nat} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \right) + \eta \right\}$$

$$B_0 = \frac{2\pi}{\eta^3} \left\{ (1-\eta^2) \left(\log \mathrm{nat} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \right) + \eta \right\}$$

Die Messungen.

Zu den Messungen wurden 4 Leydener Flaschen benutzt, die wir, von der kleinsten angefangen, als IV, III, II und I bezeichnen. Die Capacitäten dieser Flaschen wurden direkt verglichen und ergaben, bezogen auf $C_{IV} = 100$, die Werthe $C_{IV} = 100$, $C_{III} = 151$, $C_{II} = 185$, $C_I = 396$. Da aber in unseren Beobachtungen zu den Flaschen noch die beiden Condensatoren parallel geschaltet waren, so sind die Verhältnisse kleiner. Die in Betracht kommenden Capacitäten lassen sich angenähert aus den Ausschlägen unseres Standardinstruments bei so grosser Entfernung der beiden Mikrometerkugeln, dass keine Funken mehr überspringen ($\tau = \infty$), vergleichen. Es waren z. B. diese Ausschläge α und die daraus berechneten Capacitäten C

Flasche	IV	III	II	I
α	644	431	380	199
C	100	149,6	170	324

Letztere Werthe von C sind für unsere Versuche massgebend.

Die entsprechenden Wellenlängen λ, die den Wurzeln aus den Capacitäten proportional sind, sind

$$\lambda_{IV} = 100 \quad \lambda_{III} = 122,3 \quad \lambda_{II} = 130,4 \quad \lambda_{I} = 180,0.$$

Die Wellenlängen umfassen also keine ganze Oktave. Ausserdem aber konnten wir, wie erwähnt, sehr grosse Wellenlängen anwenden, indem wir ohne Funken, bloss mit den Ruhmkorffschwingungen arbeiteten. Diese Wellenlänge wollen wir als λ_R bezeichnen.

Bei jeder Flasche wurden gewöhnlich 4 Messungen in der Art gemacht, dass die Funkenstrecke auf 3 verschiedene, jeweils passende Abstände gebracht wurde, bei denen continuirlich Funken übergingen und die wir von der grössten zur kleinsten mit τ_a, τ_b, τ_c bezeichnen, und eine vierte Messung ohne Funken, mit τ_∞ bezeichnet. Wir nehmen an, dass bei derselben Flasche die Schwingungsdauer sich nicht wesentlich ändert, wenn man der Funkenstrecke die Längen τ_a, τ_b, τ_c giebt, die höchstens um einige Millimeter differirten. Feddersen zeigte bereits, dass diese Veränderung ohne wesentlichen Einfluss ist.

Beobachtungen an Schwefel.

Um die Dielektrizitätsconstante des Schwefels für verschiedene λ zu messen und zugleich für unser Standardinstrument das γ zu bestimmen, welches in die weiteren Messungen eingeht, wendeten wir eine Scheibe und ein Stäbchen aus Schwefel an. Aus dem Verhältniss ihrer Drehungen lässt sich γ berechnen. Bezeichnen wir nämlich für die Scheibe alle Grössen mit deutschen, für das Stäbchen mit lateinischen Buchstaben, so ergiebt sich aus der obigen Formel 2)

$$\frac{(1+\gamma\mathfrak{A}_0)(1+\gamma\mathfrak{B}_0)}{(1+\gamma A_0)(1+\gamma B_0)} = \frac{p}{\mathfrak{p}}\frac{M}{\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{V}}{V}\frac{\mathfrak{B}_0-\mathfrak{A}_0}{B_0-A_0} = f.$$

Es ist dabei vorausgesetzt, dass die beiden Schwefelstücke dasselbe γ haben, eine Voraussetzung, die wohl unbedenklich ist, da Scheibe und Stäbchen gleichzeitig hergestellt waren.

Die Resultate der Messungen sind folgende, wobei jeder Werth von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ aus mindestens 3 durch Schwingungsbeobachtungen erhaltenen Einzelwerthen das Mittel ist.

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Schwefelstäbchen}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_I	λ_R
$\tau = a$	0,5695	0,5568	0,5866	0,5509	0,5634 aus I
$\tau = b$	0,5683	0,5643	0,5602	0,5573	0,5687 „ II
$\tau = c$	0,5705	0,5691	0,5491	0,5686	0,5583 „ III
					0,5692 „ IV
Mittel	0,5694	0,5634	0,5653	0,5589	0,5649

Diese Zahlen weichen vom Mittel um nicht mehr als 1 % ab, so dass eine Abhängigkeit von der Wellenlänge nicht zu erkennen ist, sie zeigen zugleich, dass die Methode bis auf 1 bis 2 % übereinstimmende Zahlen ergiebt. Diese Fehlergrenze beruht hauptsächlich darauf, dass der Unterbrecher des Ruhmkorff nicht regelmässig funktionirt, ein Uebelstand, der durch die gleichzeitige Beobachtung an zwei Instrumenten wohl in seiner Wirkung reducirt, aber nicht ganz unschädlich gemacht werden kann.

Die zur Berechnung von γ nothwendigen Constanten sind

$$\mathfrak{A}_0 = 11,8432 \quad \mathfrak{B}_0 = 0,3616 \quad \mathfrak{M} = 4,4174 \quad \frac{\mathfrak{B}}{V} = \frac{621}{491}$$
$$A_0 = 0,6105 \quad B_0 = 5,9780 \quad M = 4,3400.$$

Aus dem Mittelwerth aller $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ ergiebt sich

$$\gamma = 0{,}24915$$
$$D = 1 + 4\,\pi\,\gamma = 4{,}131.$$

Dieser Werth für D liegt nahe an dem von Boltzmann gefundenen, welcher für die drei Hauptaxen die Werthe fand $D = 4{,}773$, $3{,}970$, $3{,}811$, im Mittel also $4{,}184$. Diese beiden Schwefelstücke wurden gleich nach der Herstellung (Guss) untersucht. Für andere, lange benützte Schwefelstücke fanden wir $\gamma = 0{,}24915$, woraus $D = 3{,}798$ sich ergiebt. Es ist bekannt, dass gegossener Schwefel beim Stehen spontan in eine andere Modifikation übergeht.

Beobachtungen an Paraffin.

Eine Paraffinscheibe von 20,9 mm Durchmesser und 1,2 mm Dicke wurde mit einer Schwefelscheibe verglichen, für welche $s = 54{,}855$ (s. p. 194) war. Es ergaben sich folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Paraffinscheibe}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
$\tau = a$	0,3239	0,3406	0,3115	0,3463	0,3492 aus I
$\tau = b$	0,3388	0,3507	0,3572	0,3375	0,3441 „ II
$\tau = c$	0,3532	0,3341	0,3531	0,3420	0,3327 „ III
					0,3434 „ IV
Mittel	0,3386	0,3418	0,3406	0,3419	0,3423

Auch hier lässt sich, wie zu erwarten, ein Gang der Dielektrizitätsconstante nicht erkennen. Aus dem Mittelwerth der $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ und den Constanten der Paraffinscheibe $A_0 = 11{,}5105$, $B_0 = 0{,}52788$, $V = 411{,}7$ ergiebt sich

$$\varkappa = 0{,}1162$$
$$D = 1 + 4\,\pi\,\varkappa = 2{,}20.$$

Boltzmann fand für Paraffin 2,32.

Beobachtungen an Wasser.

Um Körper mit grösserer Dielektrizitätsconstante auf ihre etwaige Dispersion zu untersuchen, gingen wir bald zum Wasser über, dessen Dielektrizitätsconstante die grösste bisher gemessene ist. Wir brachten das Wasser in eine kleine dünnwandige Ebonitröhre (20,1 mm Länge, 3,0 mm Durchmesser), welche an den beiden Enden durch Ebonitpfröpfchen verschlossen war. Die Messungen wurden erst an der leeren, dann an der mit Wasser gefüllten Röhre vorgenommen und die ersteren Ausschläge, auf gleiche Standardausschläge reducirt, von den letztern abgezogen. Diese Correktion betrug 2—3 %. Mit den Ruhmkorffschwingungen allein haben wir keine Messungen angestellt, weil bei unsern Potentialen dann die Ausschläge zu gross wurden, so dass merkbare Einwirkungen der Ladungen auf den Spiegel der Aufhängung stattfanden, die nur unsicher hätten eliminirt werden können. Wir beschränken uns also auf die Angabe der Resultate mit raschen Condensatorschwingungen. Die benützte Schwefelscheibe hatte ein $s = 43{,}610$.

Die Beobachtungen ergaben folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Wasserröhrchen}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{IV}
$\tau = a$	4,1812	4,1823	4,1324
$\tau = b$	4,1577	4,1326	3,9869
$\tau = c$	4,1117	4,0481	4,0802
Mittel	4,1502	4,1210	4,0665

Es scheint hier ein Gang der Dielektrizitätsconstante in der Weise vorzuliegen, dass mit wachsender Wellenlänge auch die Dielektrizitätsconstante grösser wird. Da jedoch die Differenzen der $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ 2 % nur wenig übersteigen, so ist das

Resultat nicht sicher. Aus dem Mittelwerth der $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ und $A_0 = 0{,}45998$, $B_0 = 6{,}05330$, $V = 140{,}00$ ergiebt sich

$$\varkappa = 5{,}8324$$
$$D = 73{,}54$$

ein Werth, der mit den bisher bekannten gut übereinstimmt. Es ist jedoch dieses Resultat bei so grossen Werthen von D nur durch aussergewöhnliche Sorgfalt zu erreichen und zwar desshalb, weil eben der Werth von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ so gross ist, dass kleine Aenderungen in ihm und kleine Ungenauigkeiten in der Bestimmung der Dimensionen des Röhrchens schon grosse Aenderungen von D hervorbringen.

Um diesen Uebelstand, der auch bei anderen Substanzen sich zeigte, zu vermeiden, haben wir versucht, ob wir nicht derartige Körper mit grossem D mit Metallen vergleichen können.

Beobachtungen an Kupfer.

Wendet man die Mosotti-Poisson'sche Theorie auf Metalle an, so ist, weil für diese bei statischen Zuständen das Potential constant sein muss, die Dielektrisirungsconstante $\varkappa = \infty$ zu setzen. Es war die Frage, ob bei unsren, immerhin raschen Schwingungen die Ladungen den Metallen gegen über noch als statische oder besser quasistatische anzusehen wären. War das der Fall, dann musste ein Kupferstäbchen den Werth $D = \infty$ ergeben. Dabei ist zu bedenken, dass die oben entwickelte Formel 3, durch welche man D aus $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ bestimmt, eine Curve von folgendem Verlauf giebt. Trägt man die $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ als Abscissen auf, so steigt die Curve von D erst langsam, dann rascher an und geht endlich steil bis $+\infty$, um dann nach $-\infty$ zu springen und mit weiter wachsendem $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ allmählich kleinere negative Werthe von D zu liefern.

Wenn also die Beobachtungen einen sehr grossen positiven oder negativen Werth von D ergeben, so ist dies ein Beweis für $\varkappa = \infty$. Die Beobachtungen ergaben für ein Kupferstäbchen von 23 mm Länge und 2,94 mm Durchmesser (an den Enden abgerundet) folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Kupferstäbchen}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{IV}
$\tau = a$	7,971	8,008	8,004
$\tau = b$	8,153	7,823	8,053
$\tau = c$	7,983	8,085	8,017
Mittel	8,0357	7,9720	8,0280

Mit dem kleinsten Werth 7,9720 ergiebt sich $D = + 7445$, mit dem grössten 8,0357, der nur um 0,75 % grösser ist, $D = - 9120$, so dass damit der Werth von $\varkappa = \infty$ für unsre Schwingungen als gültig bewiesen ist.

Wenn das Kupferstäbchen als Standard genommen wird, so ist der Werth der Grösse s (p. 194).

$$s = \frac{(\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}_0)\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{B}_0} = 397,7.$$

Beobachtungen an Bromblei.

Ein Stäbchen aus Bromblei von 21,6 mm Länge und 3,9 mm Dicke ergab mit Kupfer verglichen folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Brombleistäbchen}}{\text{Kupferstäbchen.}}$

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{III}	λ_{IV}
$\tau = a$	0,8767	0,7828	0,8355	0,8223
$\tau = b$	0,8573	0,8486	0,7929	0,7884
$\tau = c$	0,8437	0,8141	0,7956	0,7760
Mittel	0,8592	0,8152	0,8080	0,7956

Hier zeigen die Zahlen $\frac{p}{\mathfrak{p}}$, von denen die Dielektrizitätsconstante abhängt, einen ausgesprochenen Gang mit der Wellenlänge und zwar so, dass die Dielektrizitätsconstante mit wachsender Wellenlänge selbst wächst. Die Berechnung ergiebt für die Dielektrizitätsconstante

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}
$D =$	41,792	42,938	43,692	48,643

Dieser Gang zeigt an, dass bei kürzeren Wellen als λ_{IV} Absorptionen und anomale Dispersionen stattgefunden haben und dass die Dispersionscurve in unserem Intervall noch in aufsteigendem Gang ist.

Beobachtungen an Jodblei.

Denselben Gang ergaben die Beobachtungen an einem Jodbleistäbchen von 21,7 mm Länge und 3,60 mm Dicke. Es ergaben sich folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Jodbleistäbchen}}{\text{Kupferstäbchen}}$.

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{IV}
$\tau = a$	0,8178	0,8030	0,8243
$\tau = b$	0,9303	0,9191	0,8544
$\tau = c$	0,9355	0,8977	0,8158
Mittel	0,8946	0,8733	0,8315

Die Differenz der äussersten Werthe ist 7 %. Die daraus berechneten Werthe der Dielektrizitätsconstanten, die grössten bisher bekannten, sind

	λ_{IV}	λ_{II}	λ_{I}
D	113,2	147,7	172,8

Wenn nun auch der Gang der Dielektrizitätsconstante bei diesen beiden Körpern die frühere Ansicht zu bestätigen scheint, dass mit Abkürzung der Ladungszeit die Dielektrizitätsconstanten kleiner werden, weil die Leitung sich dann nicht voll entwickeln kann, so scheinen uns gegen diese Erklärung die Gründe zu sprechen, dass erstens bei unserem Wasser (Wasserleitungswasser, nicht destillirtes Wasser), welches ein besserer Leiter als Jodblei und Bromblei bei diesen Temperaturen ist, ein so erhebliches Anwachsen von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ mit waschsender Wellenlänge sich nicht zeigt, sondern nur ein noch in die Beobachtungsfehler fallendes und zweitens, dass unsere nun anzuführenden Beobachtungen an Beryll ein ganz anderes, anomales Verhalten zeigten.

Beobachtungen an Beryll.

Wir hatten eine senkrecht zur Axe geschnittene Beryllscheibe, welche wir der Freundlichkeit des Herrn Prof. Groth verdanken. Ihr Durchmesser ist 15,5 mm, ihre Dicke 0,44 mm. Daraus ergeben sich ihre Constanten

$$A_0 = 12{,}0254 \qquad B_0 = 0{,}27038 \qquad V = 83{,}025$$

Folgendes ist das Resultat einer ersten Messungsreihe:

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Beryllscheibe}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{IV}	λ_{II}	λ_I	λ_R
$\tau = a$	1,0246	0,7836	1,1270	0,6935 aus I
$\tau = b$	1,1027	0,7149	0,9531	0,7185 „ II
$\tau = c$	0,9410	0,7767	1,0698	0,6735 „ IV
Mittel	1,0228	0,7584	1,0499	0,6952

Die Zahlen zeigen deutlich ein Minimum von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ und daher auch ein Minimum der Dielektrizitätsconstante für die

Wellenlänge λ_{II}. Die Dielektrizitätsconstanten ergeben sich aus diesen Zahlen:

	λ_{IV}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
$D =$	8,503	6,580	9,207	5,943

Der Verlauf dieser Zahlen, die hier von der kürzesten zur längsten Wellenlänge fortschreitend geordnet sind, ist genau derselbe, wie der für den optischen Brechungsindex bei anomaler Dispersion. Es sind z. B. für Fuchsin die Zahlen von Wernicke für die

Linie	H	G	C	A
$n =$	1,54	1,31	1,90	1,73.

Um die Werthe von D sicherer zu bestimmen, haben wir eine zweite Versuchsreihe mit einer andern Schwefelscheibe als Standard angestellt, indem wir noch die Flasche III, die eine Wellenlänge zwischen II und IV ergiebt, hinzunahmen.

Folgendes sind die

Werthe von $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Beryllscheibe.}}{\text{Schwefelscheibe II.}}$

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
$\tau = a$	0,6274	0,5042	0,5407	0,6233	0,5217 aus I
$\tau = b$	0,6146	0,5189	0,5426	0,6008	0,4885 „ II
$\tau = c$	0,5738	0,4775	0,5360	0,6572	0,5140 „ III
					0,4876 „ IV
Mittel	0,6053	0,5002	0,5398	0,6271	0,5029

Es ist also hier der Gang der Zahlen genau derselbe, nur zeigt sich das Minimum noch bei kürzeren Wellen als früher, nämlich schon bei der Wellenlänge λ_{III}.

Die hieraus berechneten Werthe von D sind, zusammengestellt mit den aus den vorigen Beobachtungen, folgende:

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
Beob. I	8,50		6,58	9,21	5,94
Beob. II	7,80	6,60	7,08	8,04	6,68
Mittel	8,15	6,60	6,83	8,62	6,31

Die aus der Formel $n^2 = D$ berechneten Brechungsexponenten sind folgende:

$$n = 2{,}846 \quad 2{,}588 \quad 2{,}613 \quad 2{,}936 \quad 2{,}512.$$

Curie[1]) fand für Beryll in der Richtung der optischen Axe $D_c = 6{,}24$, senkrecht zur optischen Axe $D_a = 7{,}58$.

Die Dispersionscurve verläuft übrigens bei Beryll lange nicht so scharf, wie sie es bei Fuchsin thut.

Wir beabsichtigen diese Erscheinungen bei Beryllstäbchen anderer Provenienz und verschiedener Orientirung der Axe weiter zu untersuchen und die Wellenlängen, bei denen die anomale Dispersion stattfindet, absolut zu bestimmen. Aus der Thatsache der anomalen Dispersion lässt sich auch erkennen, warum die Einzelbeobachtungen beim Beryll nicht denselben Grad der Uebereinstimmung zeigen, wie bei anderen Substanzen. Wir haben es ja sicher nicht mit ganz reinen Wellen zu thun, sondern jedenfalls mit etwas gemischten, zum mindesten schon dadurch, dass die Ruhmkorffschwingungen sich den Funkenschwingungen überlagern.

Wenn man die oben unter 1 angegebene Formel betrachtet, so erkennt man, wie sich in unserem Falle das Analogon zu der prismatischen Trennung der Farben ergiebt. Denn der Winkel, den die dielektrische Axe des polarisirten Körpers mit der Rotationsaxe bildet, ist, wenn $\varphi = 45^0$ ist,

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{1 + \varkappa A_0}{1 + \varkappa B_0}$$

1) Curie Ann. chim. et phys. (6) 17. p. 385. 1889.

Hat also $\varkappa$ für verschiedene Längen der Wellen verschiedene Werthe, so ist die Richtung der dielektrischen Axe im Körper jedesmal verschieden und ein System von verschiedenen gleichzeitig ankommenden Wellen giebt eine Reihe von fächerartig auseinandergehenden dielektrischen Axen.

Da die Absorption der elektrischen Strahlen, die die Dispersion bedingt, von der Leitung abhängt, so folgt aus unseren Versuchen auch, dass die Leitungsfähigkeit solcher Körper bei verschiedenen Wellenlängen verschieden sein muss und allgemein, dass Dielektrizitätsconstante und Leitungsfähigkeit nicht vollständig von einander unabhängige Grössen sind, sondern dass sie in ähnlicher Weise durch die Constitution des Körpers zusammenhängen, wie in der Optik absorbirender Körper die Brechung und die Absorption.

München, Physik. Institut d. Univers., Mai 1894.

Ueber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Der Abschnitt der Kirchhoff'schen Vorlesungen über Gastheorie überragt so wie die übrigen Theile dieses Werkes sowohl in der Vorzüglichkeit der Auswahl des Stoffes als auch in der Darstellung weit die gewöhnlichen Lehrbücher. So wird dort zum ersten Male auf die Richtigkeit der Thatsache hingewiesen, dass die 3 experimentell so oft gefundenen Werthe 1·67, 1·4 und 1·33 für das Verhältniss der Wärmecapacitäten eines Gases bei constantem Drucke und Volumen, aus der Annahme der Analogie der Gasmoleküle mit festen Körperchen folgen und ich will bei dieser Gelegenheit nur beiläufig bemerken, dass der Haupteinwand gegen diese Analogie, der auf der complicirten Natur des Spectrums selbst des *Hg*-Dampfes begründet ist, durch die Versuche von Pringsheim[1]) sehr an Bedeutung verliert, welche beweisen, dass diese Spectra nicht durch die regelmässige innere Wärmebewegung der Gasmoleküle zwischen je 2 Zusammenstössen, sondern durch fremdartige chemische Erregungen (elektrische Schwingungen im umgebenden Aether?) hervorgebracht werden.

---

1) Wied. Ann. 49, p. 347, 1893.

Umsomehr müssen, wie mir scheint, die Ungenauigkeiten der Darstellung in dem eingangs erwähnten Buche rückhaltslos aufgedeckt werden, damit sich nicht, von Kirchhoffs Autorität gedeckt, Irrthümer in die Gastheorie einschleichen. Denn selbst diejenigen, die wie der Herausgeber des in Rede stehenden Theiles der Kirchhoff'schen Vorlesungen die Gastheorie des auf sie aufgewandten Scharfsinnes unwerth achten, können und sollen nicht wünschen, dass, wer überhaupt über Gastheorie schreibt, es mit geringerem Scharfsinn thue.

Auf Seite 147 des 4. Bandes der Vorlesungen über mathematische Physik findet Kirchhoff für die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten eines von einem Zusammenstosse kommenden Molekülpaares in den durch das Integrale angegebenen Gebieten liegen, den Werth:

$$\begin{aligned} N^2 f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + Q)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - Q)\,\cdot \\ \cdot \int d\,x_1\, d\,y_1\, d\,z_1\, d\,\xi_1\, d\,\eta_1\, d\,\zeta_1\, d\,x_2\, d\,y_2\, d\,z_2\, d\,\xi_2\, d\,\eta_2\, d\,\zeta_2 \end{aligned} \qquad 1)$$

Da hier Q einen bestimmten Werth hat, nach welchem später differentiirt wird, so sind die Grenzen der Gebiete so eng zu ziehen, dass sie nur Molekülpaare umfassen, die vorher in ganz bestimmter Weise zusammengestossen sind. Das gleichzeitige Zusammentreffen zweier Moleküle in diesen beiden Gebieten kann daher nie durch die zufällige progressive Bewegung, bei welcher beide Moleküle von einander unabhängig sind, veranlasst werden, sondern nur durch einen vorhergehenden Zusammenstoss. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Moleküle gleichzeitig in diesen Gebieten liegen, darf daher nicht, wie die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens zweier von einander unabhängiger Ereignisse berechnet und gleich

$$\begin{aligned} N^2 f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)\,\cdot \\ \cdot \int d\,x_1\, d\,y_1\, d\,z_1\, d\,\xi_1\, d\,\eta_1\, d\,\zeta_1\, d\,x_2\, d\,y_2\, d\,z_2\, d\,\xi_2\, d\,\eta_2\, d\,\zeta_2 \end{aligned}$$

gesetzt werden, wodurch die Beweiskraft der folgenden

Deductionen hinfällig wird. Diese Wahrscheinlichkeit kann nur aus der Wahrscheinlichkeit der Zustände der beiden Moleküle vor dem Zusammenstosse und dem Verlaufe des letzteren berechnet werden, wodurch sich der Ausdruck 1) ergiebt. Erst wenn man die Gültigkeit der Gleichung

$$f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + Q)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta^2 - Q) =$$
$$= f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)$$

bereits voraussetzt, folgt, dass diese Wahrscheinlichkeit ebensogross ist, als ob die beiden Moleküle unabhängig von einander in die betreffenden Bezirke gelangt wären, woraus dann Maxwell in bekannter Weise schliesst, dass sein Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz durch die Zusammenstösse nicht verändert wird. Dass nicht auch andere Geschwindigkeitsvertheilungsgesetze möglich sind, die durch die Zusammenstösse ebenfalls nicht gestört werden, kann auf diesem Wege überhaupt nicht bewiesen werden.

Bezüglich der Anwendung der auch von Kirchhoff benützten Functionaldeterminante in der Gastheorie sowie deren Beziehung zu Liouville und Jacobis Rechnungen vergl. Wien. Sitzungsber. Bd. 58, Oct. 1868, Bd. 63, März 1871, April 1871 etc. bezüglich der Abgrenzung der Integrationsgebiete vor und nach dem Zusammenstosse, Wien. Sitzungsber. Bd. 66, Oct. 1872, Abschn. 4. Die letzte dieser Abhandlungen citirt auch Hr. Planck bei anderer Gelegenheit.

Um nicht missverstanden zu werden, will ich mich noch enger dem Texte des Kirchhoff'schen Buches anschliessen. Daselbst werden auf Seite 145 zwei Gebiete der Variabeln $\int dx_1\, dy_1\, dz_1\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1$ und $\int dx_2\, dy_2\, dz_2\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2$ betrachtet. Nehmen wir nun an, es soll sich gleichzeitig ein Molekül in dem einen und ein 2. in dem 2. Gebiete befinden (d. h. die Werthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des betreffenden Moleküls sollen innerhalb der durch das Integrale angegebenen Grenzen liegen). Dann

Umsomehr müssen, wie mir scheint, die Ungenauigkeiten der Darstellung in dem eingangs erwähnten Buche rückhaltslos aufgedeckt werden, damit sich nicht, von Kirchhoffs Autorität gedeckt, Irrthümer in die Gastheorie einschleichen. Denn selbst diejenigen, die wie der Herausgeber des in Rede stehenden Theiles der Kirchhoff'schen Vorlesungen die Gastheorie des auf sie aufgewandten Scharfsinnes unwerth achten, können und sollen nicht wünschen, dass, wer überhaupt über Gastheorie schreibt, es mit geringerem Scharfsinn thue.

Auf Seite 147 des 4. Bandes der Vorlesungen über mathematische Physik findet Kirchhoff für die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten eines von einem Zusammenstosse kommenden Molekülpaares in den durch das Integrale angegebenen Gebieten liegen, den Werth:

$$\begin{aligned} &N^2 f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + Q) f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - Q) \cdot \\ &\cdot \int d x_1\, d y_1\, d z_1\, d \xi_1\, d \eta_1\, d \zeta_1\, d x_2\, d y_2\, d z_2\, d \xi_2\, d \eta_2\, d \zeta_2 \end{aligned} \qquad 1)$$

Da hier Q einen bestimmten Werth hat, nach welchem später differentiirt wird, so sind die Grenzen der Gebiete so eng zu ziehen, dass sie nur Molekülpaare umfassen, die vorher in ganz bestimmter Weise zusammengestossen sind. Das gleichzeitige Zusammentreffen zweier Moleküle in diesen beiden Gebieten kann daher nie durch die zufällige progressive Bewegung, bei welcher beide Moleküle von einander unabhängig sind, veranlasst werden, sondern nur durch einen vorhergehenden Zusammenstoss. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Moleküle gleichzeitig in diesen Gebieten liegen, darf daher nicht, wie die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens zweier von einander unabhängiger Ereignisse berechnet und gleich

$$\begin{aligned} &N^2 f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) \cdot \\ &\cdot \int d x_1\, d y_1\, d z_1\, d \xi_1\, d \eta_1\, d \zeta_1\, d x_2\, d y_2\, d z_2\, d \xi_2\, d \eta_2\, d \zeta_2 \end{aligned}$$

gesetzt werden, wodurch die Beweiskraft der folgenden

Deductionen hinfällig wird. Diese Wahrscheinlichkeit kann nur aus der Wahrscheinlichkeit der Zustände der beiden Moleküle vor dem Zusammenstosse und dem Verlaufe des letzteren berechnet werden, wodurch sich der Ausdruck 1) ergiebt. Erst wenn man die Gültigkeit der Gleichung

$$f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + Q)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - Q) = \\ = f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)$$

bereits voraussetzt, folgt, dass diese Wahrscheinlichkeit ebensogross ist, als ob die beiden Moleküle unabhängig von einander in die betreffenden Bezirke gelangt wären, woraus dann Maxwell in bekannter Weise schliesst, dass sein Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz durch die Zusammenstösse nicht verändert wird. Dass nicht auch andere Geschwindigkeitsvertheilungsgesetze möglich sind, die durch die Zusammenstösse ebenfalls nicht gestört werden, kann auf diesem Wege überhaupt nicht bewiesen werden.

Bezüglich der Anwendung der auch von Kirchhoff benützten Functionaldeterminante in der Gastheorie sowie deren Beziehung zu Liouville und Jacobis Rechnungen vergl. Wien. Sitzungsber. Bd. 58, Oct. 1868, Bd. 63, März 1871, April 1871 etc. bezüglich der Abgrenzung der Integrationsgebiete vor und nach dem Zusammenstosse, Wien. Sitzungsber. Bd. 66, Oct. 1872, Abschn. 4. Die letzte dieser Abhandlungen citirt auch Hr. Planck bei anderer Gelegenheit.

Um nicht missverstanden zu werden, will ich mich noch enger dem Texte des Kirchhoff'schen Buches anschliessen. Daselbst werden auf Seite 145 zwei Gebiete der Variabeln $\int dx_1\, dy_1\, dz_1\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1$ und $\int dx_2\, dy_2\, dz_2\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2$ betrachtet. Nehmen wir nun an, es soll sich gleichzeitig ein Molekül in dem einen und ein 2. in dem 2. Gebiete befinden (d. h. die Werthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des betreffenden Moleküls sollen innerhalb der durch das Integrale angegebenen Grenzen liegen). Dann

sind, je nach der Lage der betreffenden Gebiete 3 Fälle möglich. 1. Die beiden Moleküle eilen eben einem Zusammenstosse zu (d. h. sie stossen, nachdem sie gleichzeitig die Gebiete passirt haben, miteinander zusammen und keines stösst in der Zwischenzeit mit einem 3. zusammen). 2. Sie kommen eben von einem Zusammenstosse (d. h. sie stiessen, vor sie in die Gebiete eintraten, miteinander zusammen, wieder ohne dass eines derselben in der Zwischenzeit mit einem 3. zusammenstiess). Der 3. Fall umfasst alle anderen Möglichkeiten.

Im Kirchhoff'schen Buche wird nun auch im 2. Falle die Wahrscheinlichkeit, dass beide Moleküle gleichzeitig in beiden Gebieten liegen, gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten gesetzt, dass je eines der Moleküle im betreffenden Gebiete liegt, was nur erlaubt ist, wenn man die Richtigkeit der zu erweisenden Gleichung $f(u_1 + Q)\, f(u_2 - Q) = f(u_1)\, f(u_2)$ schon voraussetzt. Denn da im 2. Falle die Gebiete so liegen, dass soeben eine Wechselwirkung der Moleküle stattgefunden haben muss, so kann die Anwesenheit des einen Moleküles in seinem Gebiete nicht als ein von der Anwesenheit des andern Moleküls in seinem Gebiete unabhängiges Ereigniss aufgefasst werden.

Zur Integration der Diffusionsgleichung bei variabeln Diffusionscoefficienten.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Herr O. Wiener gab[1]) eine interessante Methode an, den Vorgang der Diffusion zweier Flüssigkeiten in allen Schichten gleichzeitig zu beobachten. Dabei zeigte sich bedeutende Veränderlichkeit des Diffusionscoefficienten. Herr Wiener zeigt, wie man diesem Umstande bei Berechnung der Versuche durch ein Näherungsverfahren Rechnung tragen kann. Ich habe nun schon vor langer Zeit ein Integrale der Diffusionsgleichung für variabeln Diffusionscoefficienten gefunden, welches Hausmaninger[2]) allerdings mit geringem Erfolge zur Berechnung der Versuche Waitz's verwendete. Da dasselbe vielleicht zur Berechnung der Wiener'schen Versuche nützlich sein könnte, so erlaube ich mir hier nochmals darauf zurückzukommen.

Zählen wir, wie Hr. Wiener die $+x$ von der ursprünglichen Grenze der übereinandergeschichteten Flüssigkeiten aus vertikal nach abwärts, bezeichnen mit n_1, n_2, n die Brechungsindices in der obern resp. untern reinen und an irgend einer Stelle der gemischten Flüssigkeit, mit t die

1) Wied. Ann. 49 p. 105, 1893.

2) Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. 86, p. 1073, 1882.

seit Beginn der Diffusion verflossene Zeit und nehmen an, dass n die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial n}{\partial x}\right) \tag{1}$$

erfüllt, wo k eine gegebene Funktion von n ist, sowie, dass die Diffusion weder Boden noch Niveau der obern Flüssigkeit in merklicher Weise erreicht hat, so folgt allgemein

$$n = n_2 - \frac{(n_2 - n_1)\displaystyle\int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^{\lambda} \frac{\lambda\, d\lambda}{2k}}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^{\lambda} \frac{\lambda\, d\lambda}{2k}}} \tag{2}$$

Man sieht, dass n und daher auch k nur Funktion von $x:\sqrt{t}$ ist. Unter den Integralzeichen ist immer der Werth des k für $x:\sqrt{t} = \lambda$ zu verstehen. Ich will mich hier nicht weiter darauf einlassen, wie diese Formel abgeleitet werden kann; dass sie alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, sieht man ohne weiteres. Die Gleichung 2) würde auch richtig sein, wenn k direkt als Funktion von $x:\sqrt{t}$ gegeben wäre; man könnte dann n unmittelbar daraus berechnen. Da aber hier k nicht direkt als Funktion von $x:\sqrt{t}$ gegeben ist, sondern eine zu findende Funktion von n ist, so kann diese Formel zur Berechnung der Versuche nicht verwendet werden. Man muss vielmehr k aus derselben berechnen. Man findet zunächst, wenn man wieder $\lambda = x:\sqrt{t}$ setzt

$$-\frac{1}{2}\lambda \frac{dn}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(k \frac{dn}{d\lambda}\right) \tag{3}$$

und hieraus bei constantem t

$$k = \frac{1}{2t\frac{dn}{dx}} \int_x^{\infty} \frac{dn}{dx} \cdot x \cdot dx \cdot \tag{4}$$

Hr. Wiener findet nun durch das Experiment direkt Curven, deren (von einer schrägen Geraden an gezählte) Ordinaten z den Werthen von $\frac{dn}{dx}$ multiplicirt mit der Constanten $a\,\delta$ gleich sind, während die Abscissen $y = y_0 + x/\eta$ sind. (Siehe dessen Fig. 13 pag. 123.) Dabei ist η eine experimentell gegebene Constante, y_0 aber der Werth des y für die Stelle, wo die schräge Gerade die ursprüngliche Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten schneidet. Daraus folgt:

$$k = \frac{\eta^2}{2\,t\,z} \int_y^\infty z\,(y - y_0)\,d\,y \qquad 5)$$

Wir berechnen nun zu irgend einem x das dazu gehörige y, ziehen die diesem y entsprechende Ordinate z der Diffusionscurve, bezeichnen mit f den Flächenraum, der links von der Ordinate z, oben von der schrägen Geraden, unten von der Diffusionscurve begrenzt ist, und mit y_s die Abscisse des Schwerpunkts dieses Flächenraumes. Dann ist $f = \int_y^\infty z\,d\,y$, $y_s \cdot f = \int_y^\infty z\,y\,d\,y$, daher ist

$$k = \frac{y^2 f\,(y_s - y_0)}{2\,t\,z} \qquad 6)$$

der Werth des Diffusionscoefficienten für das betreffende x und t. Kann der Anfang der Diffusion nicht genau festgestellt werden, so ist er natürlich als 2. Unbekannte einzuführen, die Gleichung 6) für 2 verschiedene Zeiten aufzustellen, und daraus k und der Zeitanfang zu bestimmen. Die Vermuthung Herrn Wieners, dass der Diffusionscoefficient besser aus Versuchen mit geringen Concentrationsunterschieden berechnet werden kann, dürfte vollkommen richtig sein. Dagegen kann die obige Formel dienen, um zu controliren, ob für beträchtliche Concentrationsdifferenzen die Gleichung 1) gilt, in welchem

Bezeichnen wir den Maximalwerth des z zu 2 verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 mit z_1 und z_2 die dazu gehörigen y mit y_1 und y_2, so ist also, wenn man annimmt, dass sich $\frac{1}{h}\frac{dk}{dn}$ in der Zeit $t_2 - t_1$ nicht erheblich verändert hat

$$\frac{1}{h}\frac{dk}{dn} = \frac{\eta a \delta}{2(t_2 - t_1)}\left[\frac{y_0 - y_2}{z_2} - \frac{y_0 - y_1}{z_1}\right] \qquad 10)$$

Man könnte nun aus Versuchen mit geringer Concentrationsdifferenz k als Function von n und daraus $dk:dn$ berechnen. Würden diese Werthe mit den für grosse Concentrationsunterschiede nach der letzten Formel (darin $h = 1$ gesetzt) berechneten stimmen, so wäre dies ein Beweis der Gültigkeit der Gleichung 1).

Obwohl die vorliegenden Versuche Hrn. Wieners zu einer ausführlichen theoretischen Discussion, wie er selbst bemerkt, noch zu ungenau sind, so will ich doch die Formel9) auf das Diagramm Wieners Fig. 15 p. 135 anwenden, um überhaupt zu zeigen, wie die numerische Berechnung geschehen kann. Daselbst ist

$$\eta = \frac{e_1 - a}{e_1} = \frac{575 \cdot 9}{676 \cdot 5} = 0 \cdot 851, \; a = 100 \cdot 6\,\text{cm}, \; \delta = 1 \cdot 027\,\text{cm}$$

$$t = \frac{4 \cdot 18}{24}\,\text{Tage}, \; y_0 - y = \text{etwa } 4\,\text{mm}, \; z = 20\,\text{mm}, \text{ daher}$$

$$\frac{1}{h}\frac{dk}{dn} = \frac{53\,\text{cm}^2}{\text{Tag}}$$

Würde die Gleichung 1) gelten, so wäre $h = 1$; obiger Ausdruck wäre also gleich dk/dn. Anderseits findet Herr Wiener für k zwischen Wasser und 3%iger Salzsäure den Werth $k_1 = 2 \cdot 8$, zwischen Wasser und 26%iger Salzsäure aber $k_2 = 4 \cdot 2$, daher $k_2 - k_1 = 1 \cdot 4\,\text{cm}^2$:Tag. Der Unterschied der Brechungsindices zwischen Wasser und der

Dann müsste man so verfahren. Für eine bestimmte Diffusionscurve ist t constant. Daher folgt aus Gleichung 3a)

$$\frac{h\,x}{2\,t}\frac{d\,n}{d\,x} + k\frac{d^2\,n}{d\,x^2} + \frac{d\,k}{d\,n}\left(\frac{d\,n}{d\,x}\right)^2 = 0 \qquad 7)$$

also

$$\frac{z^2}{a\,\delta}\cdot\frac{1}{h}\frac{d\,k}{d\,n} + \frac{1}{\eta}\frac{d\,z}{d\,y}\frac{k}{h} + \frac{\eta}{2\,t}(y - y_0)\,z = 0 \qquad 8)$$

In dieser Gleichung sind die beiden Grössen $\frac{1}{h}\frac{d\,k}{\partial\,n}$ und $\frac{k}{h}$ also die beiden Coefficienten der Gleichung 1b) als die beiden Unbekannten (unbekannte Functionen von n) zu betrachten. Die übrigen Grössen können wie Hr. Wiener zeigt, leicht für jede Diffusionscurve berechnet werden. Man muss also in 2 zu verschiedenen Werthen von t gehörigen Diffusionscurven solche Ordinaten (y) suchen, für welche n (also die Flächen f bis zu diesen Ordinaten) gleiche Werthe haben. Diese beiden Stellen der beiden Diffusionscurven liefern 2 Gleichungen für die zu jenem n gehörigen Werthe von $\frac{1}{h}\frac{d\,k}{d\,n}$ und $\frac{k}{h}$. Wäre auch der Zeitanfang unbekannt, so müsste noch eine 3. Gleichung aus einer 3. Diffusionscurve beigezogen werden. Man kann also so für beliebig viele n die Werthe der beiden Coefficienten der Gleichung 1b) bestimmen. Natürlich ist dieses Verfahren auch auf den eingangs betrachteten Fall, dass die Gleichung 1) gilt, anwendbar und dürfte auch da dem früher beschriebenen vorzuziehen sein.

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse natürlich wieder für den Punkt, wo z sein Maximum hat, also $d\,z/d\,y = 0$ ist. Für diesen Punkt ist

$$\frac{1}{h}\frac{d\,k}{d\,n} = \frac{\eta\,(y_0 - y)\,a\,\delta}{2\,z\,t} \qquad 9)$$

Bezeichnen wir den Maximalwerth des z zu 2 verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 mit z_1 und z_2 die dazu gehörigen y mit y_1 und y_2, so ist also, wenn man annimmt, dass sich $\frac{1}{h}\frac{dk}{dn}$ in der Zeit $t_2 - t_1$ nicht erheblich verändert hat

$$\frac{1}{h}\frac{dk}{dn} = \frac{\eta\, a\, \delta}{2\,(t_2 - t_1)}\left[\frac{y_0 - y_2}{z_2} - \frac{y_0 - y_1}{z_1}\right] \qquad 10)$$

Man könnte nun aus Versuchen mit geringer Concentrationsdifferenz k als Function von n und daraus $dk:dn$ berechnen. Würden diese Werthe mit den für grosse Concentrationsunterschiede nach der letzten Formel (darin $h = 1$ gesetzt) berechneten stimmen, so wäre dies ein Beweis der Gültigkeit der Gleichung 1).

Obwohl die vorliegenden Versuche Hrn. Wieners zu einer ausführlichen theoretischen Discussion, wie er selbst bemerkt, noch zu ungenau sind, so will ich doch die Formel 9) auf das Diagramm Wieners Fig. 15 p. 135 anwenden, um überhaupt zu zeigen, wie die numerische Berechnung geschehen kann. Daselbst ist

$$\eta = \frac{e_1 - a}{e_1} = \frac{575\cdot 9}{676\cdot 5} = 0\cdot 851,\ a = 100\cdot 6\,\text{cm},\ \delta = 1\cdot 027\,\text{cm}$$

$$t = \frac{4\cdot 18}{24}\,\text{Tage},\ y_0 - y = \text{etwa } 4\,\text{mm},\ z = 20\,\text{mm}, \text{ daher}$$

$$\frac{1}{h}\frac{dk}{dn} = \frac{53\,\text{cm}^2}{\text{Tag}}$$

Würde die Gleichung 1) gelten, so wäre $h = 1$; obiger Ausdruck wäre also gleich dk/dn. Anderseits findet Herr Wiener für k zwischen Wasser und 3%iger Salzsäure den Werth $k_1 = 2\cdot 8$, zwischen Wasser und 26%iger Salzsäure aber $k_2 = 4\cdot 2$, daher $k_2 - k_1 = 1\cdot 4\,\text{cm}^2\text{:Tag}$. Der Unterschied der Brechungsindices zwischen Wasser und der

letzten Salzsäure ist $\eta f : a \delta$, wobei f die Fläche zwischen der schiefen Geraden und einer der Curven der Fig. 15 ist. Schätzt man f zu 6 cm² (die Figur ist $^1/_2$ linear verkleinert), so wird $\eta f : a \delta = 0 \cdot 05$. k_1 und k_2 sind die Diffusionscoefficienten beim mittlern Salzsäuregehalt. Es entspricht also k_1 fast reinem Wasser, k_2 aber 13% Salzsäure. Daher entspricht der Aenderung $k_2 - k_1$ des Diffusionscoefficienten etwa die Aenderung $\Delta n = 0 \cdot 025$ des Brechungsindex; es ist also

$$\frac{k_2 - k_1}{\Delta n} = 56$$

Dies stimmt gut mit dem oben für $d k : d n$ gefundenen Werth überein, was aber auch ein Zufall sein kann. Die Ableitung weiterer für die Berechnung nützlicher Formeln wird besser geschehen, wenn neue Beobachtungen vorliegen.



Ueber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik.

Von A. Wassmuth in Graz.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Ein Punkt m eines Systems von Partikeln möge sich in der Zeit τ, wenn er frei wäre, von a nach b bewegen, während seine wirkliche Bewegung durch die Strecke $a\,c$ dargestellt sei; dann sagt bekanntlich das von Gauss aufgestellte Princip des kleinsten Zwanges aus, dass $\Sigma m \cdot b\,c^2$ ein Minimum ist oder dass, wenn $a\,d$ irgend eine virtuelle d. h. mit den Bedingungen des Systems verträgliche Bewegung vorstellt, stets: $\Sigma m \cdot b\,c^2 < \Sigma m \cdot b\,d^2$ sein muss. Sind $x\,y\,z$ die Coordinaten des Punktes m, auf den die Kräfte $m\,X$, $m\,Y$, $m\,Z$ wirken sollen, so geht irgend eine Coordinate x in der sehr kleinen Zeit τ für die wirkliche Bewegung über in:

$$x + \frac{d\,x}{d\,t}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2 x}{d\,t^2}\tau^2$$

und für die freie Bewegung über in:

$$x + \frac{d\,x}{d\,t}\tau + \frac{1}{2} X \tau^2$$

so dass das Quadrat der Ablenkung $b\,c^2$ oder das Quadrat der Coordinatendifferenzen gleich $\frac{\tau^4}{4}\left[\left(\frac{d^2 x}{d\,t^2} - X\right)^2 + \ldots\right]$ wird.

Man hat daher einen Ausdruck Z — er soll der Zwang des Systems heissen — von der Form

$$Z = \Sigma m \left[\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z \right)^2 \right]$$

wobei sich die Summe auf alle Partikeln erstreckt, zu einem Minimum in Bezug auf die diversen Beschleunigungen: $\frac{d^2 x}{d t^2}, \frac{d^2 y}{d t^2}, \ldots$ die kurz $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z} \ldots$ geschrieben werden sollen, zu machen. Differenzirt man dabei die Bedingungsgleichungen des Systems: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0 \ldots$ zweimal nach der Zeit, so muss man sich, wie aus der obigen Ableitung hervorgeht[1]), gegenwärtig halten, dass die Coordinaten x und ihre ersten Differentialquotienten als „gegeben" anzusehen sind; die Gleichung: $\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = 0$ drückt nur aus, dass die $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \ddot{x} + \ldots$ unveränderlichen Werthen gleich sein müssen. Für gegebene Werthe der x und $\frac{d x}{d t}$ sollen also die $\ddot{x}$ so bestimmt werden, dass Z zu einem Minimum werde. Man erhält so die bekannten Gleichungen:

$$m(\ddot{x} - X) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \ldots = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Statt der Coordinaten $x\,y\,z \ldots$ sollen nun n von einander unabhängige Variabeln $p_1\,p_2\,p_3 \ldots p_n$ eingeführt werden, so dass die virtuelle Arbeit $= P_1\,\delta p_1 + P_2\,\delta p_2 + \ldots + P_n\,\delta p_n$ und die lebendige Kraft $T = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda}\,\dot{p}_\varkappa\,\dot{p}_\lambda$ wird, wobei die P_μ und $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$ nur von den Coordinaten abhängen und die griechischen Buchstaben, wie im folgenden immer, von 1 bis n gehen.

---

1) Lipschitz, Borch. Jour. 82. Band 316 (Rausenberger Mechanik I 166); Gibbs, Beiblätter IV 319.

Dann wird der Zwang Z, wie Lipschitz (a. a. O. p. 330) zeigte, ausgedrückt durch:

$$Z = \sum_{\mu\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{\Delta} \left[a_{1\mu} \ddot{p}_1 + a_{2\mu} \ddot{p}_2 + \ldots + \begin{bmatrix} 1\,1 \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_1 + \begin{bmatrix} 1\,2 \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots - P_\mu \right]$$

$$\left[a_{1\nu} \ddot{p}_1 + a_{2\nu} \ddot{p}_2 + \ldots + \begin{bmatrix} 1\,1 \\ \nu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_1 + \begin{bmatrix} 1\,2 \\ \nu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots - P_\nu \right]$$

wobei Δ die Determinante aus den $a_{\varkappa\lambda}$ und $A_{\mu\nu}$ die adjungirte

$$\left(A_{\mu\nu} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\mu\nu}} \right)$$

vorstellt und

$$\begin{bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial a_{\varkappa\mu}}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu} \right]$$

gesetzt ist.

Der Ausdruck für Z wird übersichtlicher und für (gewisse) physikalische Probleme geeigneter, wenn die lebendige Kraft T eingeführt wird. Setzt man nämlich:

$$T_\mu = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial p_\mu}$$

so ist[1]) auch

$$T_\mu = a_{1\mu} \ddot{p}_1 + a_{2\mu} \ddot{p}_2 + \ldots + \begin{bmatrix} 1\,1 \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_1 + \begin{bmatrix} 1\,2 \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots$$

und es wird:

$$Z = \sum_{\mu\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{\Delta} [T_\mu - P_\mu][T_\nu - P_\nu] \quad \text{d. i.} \qquad \text{(I)}$$

$$Z = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} A_{11} (T_1 - P_1)^2 + A_{22} (T_2 - P_2)^2 + \ldots \\ \quad + 2 A_{12} (T_1 - P_1)(T_2 - P_2) + \ldots \\ \qquad + 2 A_{23} (T_2 - P_2)(T_3 - P_3) + \ldots \end{array} \right\}$$

1) C. f. e. g. Rayleigh, der Schall, p. 111; Stäckel, Borch. Jour. 107, p. 322.

Da dieser Ausdruck für den Zwang Z, wie es scheint, neu ist, so ist es nicht überflüssig, nachzuweisen, dass man in Ausführung der Minimumsbedingung für Z zu den Lagrange-schen Gleichungen kommt. Dabei hat man zu Folge der obigen Bemerkung bei der Differentiation des Z nach $\ddot{p}_1$ die Grössen p_1 und $\dot{p}_1$ als gegeben oder fix anzusehen und von der Beziehung:

$$\frac{\partial T_\mu}{\partial \ddot{p}_\varkappa} = a_{\mu\varkappa} = a_{\varkappa\mu}$$

Gebrauch zu machen. Man erhält so:

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = \sum_{\mu\nu} \frac{a_{1\mu} A_{\mu\nu}}{\Delta} (T_\nu - P_\nu) + \sum_{\mu\nu} \frac{a_{1\nu} A_{\mu\nu}}{\Delta} (T_\mu - P_\mu)$$

oder, da diese Summen einander gleich sind,

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = \frac{2}{\Delta} \sum_{\mu\nu} a_{1\mu} A_{\mu\nu} (T_\nu - P_\nu)$$

oder:

$$\frac{1}{\Delta} \sum_\nu (T_\nu - P_\nu) \sum_\mu a_{1\mu} A_{\mu\nu} = \frac{1}{\Delta} \sum_\nu (T_\nu - P_\nu) [a_{11} A_{1\nu} + a_{12} A_{2\nu} \ldots]$$

Da nun nach einer Eigenschaft der Determinanten: $a_{11} A_{1\nu} + a_{12} A_{2\nu} + \ldots = \Delta$ oder Null wird, je nachdem $\nu = 1$ oder $\nu > 1$ ist, so folgt also aus: $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = 0$ auch $T_1 - P_1 = 0$ d. i. die Lagrange'sche Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} - \frac{\partial T}{\partial p_1} = P_1$$

Für den Zwang Z lassen sich ganz ähnlich, wie man für die Lagrange'sche Grundgleichung Nebenformen[1]) aufstellte, noch andere Ausdrücke finden.

Wichtig für die Anwendung ist die Bemerkung, dass sich der Zwang Z so darstellen lässt, dass darin eine Be-

1) Weinstein, Wied. Ann. 15. Budde, Mechanik I 397.

schleunigung z. B. $\ddot{p}_1$ von den übrigen losgelöst erscheint; es ist: $Z \cdot \Delta = \frac{1}{2}(L_1 \ddot{p}_1^2 + 2 M_1 \ddot{p}_1 + N_1)$ wo die $L_1\, M_1\, N_1$ die $\ddot{p}_1$ nicht enthalten und L_1 und M_1 aus $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = 0$ leicht gefunden werden können.

„Sind bei einem physikalischen Probleme die virtuelle Arbeit $\sum_\mu P_\mu \delta p_\mu$ und die lebendige Kraft $T = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, \dot{p}_\varkappa \dot{p}_\lambda$ gegeben, so lässt sich mittelst der Gleichung I der Zwang des Systems bestimmen; die Minimumseigenschaft von Z drückt ein — in vielen Fällen sicher neues — Gesetz für das System aus, ganz abgesehen davon, dass andere, vielleicht schon bekannte Gesetze durch wirkliches Differenziren des Z daraus folgen."

So hat z. B. Herr Boltzmann in wundervoll einfacher Weise an der Hand der Lagrange'schen Gleichungen, somit sich stützend auf mechanische Vorgänge, in seinen Vorlesungen I die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrizität abgeleitet. Es erhellt, dass man auch vom Principe des kleinsten Zwanges in der Form der obigen Gleichung I als Obersatz ausgehen kann und, da die virtuelle Arbeit und die lebendige Kraft angegeben werden, durch Aufsuchen der Minimumsbedingung zu den Lagrange'schen Gleichungen und — nun ganz an der Hand Boltzmann's fortschreitend — zu den Maxwell'schen Gleichungen kommen muss. Wenn es auch auf diese Art schwer möglich sein wird, die klassischen Methoden Boltzmann's, besonders die im 2. Theile seiner Vorlesungen, noch mehr zu vereinfachen, so drückt die Bedingung: $Z =$ Minimum immerhin eine neuerkannte Wahrheit aus.

Als ein Beispiel möge der Fall von 2 cyklischen Coordinaten $\dot{p}_1 = l_1'$ und $\dot{p}_2 = l_2''$ — von den langsam veränderlichen Parametern k werde einstweilen abgesehen — be-

trachtet werden. Hier ist: $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 = \frac{A}{2} l_1'^2 + \frac{B}{2} l_2'^2 + C l_1' l_2'$, wenn Boltzmann's Bezeichnung eingeführt wird. Es folgt: $a_{11} = A$, $a_{22} = B$, $a_{12} = C$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C^2$, $A_{11} = B$, $A_{12} = -C$, $A_{22} = A$, $T_1 = \frac{d}{dt}(A l_1' + C l_2')$, $T_2 = \frac{d}{dt}(B l_2' + C l_1')$. Ausserdem möge wegen der Reibung oder Zähigkeit die von Rayleigh aufgestellte Zerstreuungsfunktion (a. a. O. 108 und 109 pg.) durch $F = \frac{1}{2} \sum (\varkappa_1 \dot{x}_1^2 + \ldots) = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_1$ bezeichnet werden; dann tritt bekanntlich zu den Kräften $P_\mu = L_\mu$ noch hinzu: $-\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\mu}$. Auch erhellt aus inneren Gründen, dass $b_{12} = 0$ ist.

Hiemit wird denn schliesslich der Zwang Z ausgedrückt durch:

$$Z \times (AB - C^2) = B\left[\frac{d}{dt}(A l_1' + C l_2') - L_1 - b_{11} l_1'\right]^2$$

$$-2C\left[\frac{d}{dt}(A l_1' + C l_2') - L_1 - b_{11} l_1'\right]\left[\frac{d}{dt}(B l_2' + C l_1') - L_2 - b_{11} l_2'\right]$$

$$+ A\left[\frac{d}{dt}(B l_2' + C l_1') - L_2 - b_{22} l_2'\right]$$

und es soll Z ein Minimum sein, derart, dass $\frac{\partial Z}{\partial l_1''} = 0$ und $\frac{\partial Z}{\partial l_2''} = 0$ ist. Hierin stellen (Boltzmann I pg. 34 und 35) l_1' und l_2' die Stromstärken in 2 Leitern, b_{11} und b_{22} deren Widerstände, L_1 und L_2 die elektromotorischen Kräfte in ihnen, A und B die Coefficienten der Selbstinduction und C den der gegenseitigen Induction vor. Sind noch Conden-

satoren (l. c. I 35) eingeschaltet, so treten noch Glieder von der Form: $d_1 l_1$ und $d_2 l_2$ in die Klammern.

Die Bedingung: $Z =$ Minimum spricht also ein elektrodynamisches Grundgesetz aus und liefert die Theorie der Selbstinduction und wechselseitigen Induction für nicht zu schnelle Stromschwankungen. Will man auch die ponderomotorischen Kräfte erhalten, so muss ein langsam veränderlicher Parameter k neben l_1 und l_2 als 3. Variabele eingeführt, der allgemeine Ausdruck für Z aufgestellt und die Gleichung $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{k}} = 0$, wobei k und $\dot{k}$ als constant anzusehen sind, gebildet werden; erst nachher hat man $\dot{k} = 0$ und $\ddot{k} = 0$ zu nehmen und erhält, wie Boltzmann, die Beziehung;

$$K = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l_1'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l_2'^2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} - l_1' l_2' \frac{\partial C}{\partial k}$$

Auch die Akustik bietet ein weites Feld zur Anwendung des obigen Principes. Es treten da häufig in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft nur rein quadratische Glieder mit gleichen Coefficienten auf, wesshalb sich dann die Gleichung für den Zwang einfacher gestaltet.

Führt man die Abkürzung: $T_\mu - P_\mu = Q_\mu$ ein, so ist der Zwang Z gegeben durch:

$$\begin{aligned} Z \cdot D = \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} (T_\mu - P_\mu)(T_\nu - P_\nu) &= \sum_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu = \\ = A_{11} Q_1^2 + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \dots \quad &+ 2 A_{1n} Q_1 Q_n \\ + A_{22} Q_2^2 + \quad &+ 2 A_{2n} Q_2 Q_n \\ &+ A_{nn} Q_n^2 \end{aligned}$$

Die Bedingung: $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_\varrho} = 0$ lässt sich durch: $\frac{\partial Z}{\partial Q_\varrho} = 0$ ersetzen. Man hat nämlich:

$$\frac{dZ}{d\ddot{p}_\varrho} = \frac{\partial Z}{\partial Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial \ddot{p}_\varrho} + \dots + \frac{\partial Z}{\partial Q_n}\frac{\partial Q_n}{\partial \ddot{p}_\varrho}$$

oder wegen $\frac{\partial Q_\nu}{\partial \ddot{p}_\varrho} = \frac{\partial T_\nu}{\partial \ddot{p}_\varrho} = a_{\nu\varrho}$

$$\frac{d Z}{d \ddot{p}_\varrho} = a_{1\varrho} \frac{\partial Z}{\partial Q_1} + a_{2\varrho} \frac{\partial Z}{\partial Q_2} + \ldots + a_{n\varrho} \frac{\partial Z}{\partial Q_n} = 0; \ (\varrho = 1 \ldots n);$$

aus diesen n-Gleichungen folgt, da die Determinante: $D = |a_{\mu\nu}|$ nicht verschwindet, allgemein:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q_\nu} = 0.$$

Differencirt man demnach den obigen Ausdruck wirklich, so ergeben sich die n-Gleichungen:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial Q_\nu} = A_{1\nu} Q_1 + A_{2\nu} Q_2 + \ldots + A_{\nu n} Q_n = 0; \quad (\nu = 1 \ldots n)$$

die, da die Determinante $|A_{\mu\nu}| = D^{n-1}$ nie Null werden kann, wiederum die Lagrange'schen Gleichungen: $Q_1 = 0 \ldots$ $Q_n = 0$ nach sich ziehen.

Haben die Kräfte P ein Potential U, so dass $P_\mu = -\frac{\partial U}{\partial p_\mu}$ wird, und enthalten die Bedingungen die Zeit t explicit nicht, so hat man für die lebendige Kraft T einerseits:

$$2\,T = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2} \dot{p}_2 + \ldots$$

oder

$$2 \frac{d T}{d t} = \dot{p}_1 \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1}\right) + \ddot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \ldots$$

während andererseits, da T auch Funktion von $p_1\, \dot{p}_1 \ldots$ ist,

$$\frac{d T}{d t} = \dot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial p_1} + \ddot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \ldots \quad \text{wird;}$$

hieraus folgt durch Subtraction wegen:

$$\frac{d}{d t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\mu} = T_\mu$$

Geht man zur Elektrodynamik über und setzt: $\dot{p}_1 = J_1$, $\dot{p}_2 = J_2 \ldots$ sowie

$$Q_\mu = \frac{d}{dt}\Big[a_{1\mu} J_1 + a_{2\mu} J_2 + ..\Big] - P_\mu + \Big[b_{1\mu} J_1 + b_{2\mu} J_2 + ..\Big] \quad (3)$$

so giebt die Minimumsbedingung (1) eine Eigenschaft einer linearen Stromverzweigung an. Dabei sind a_{11}, a_{22}, $a_{33} \ldots$ die Coefficienten der Selbstinduction des ersten, zweiten Umlaufes, a_{12}, a_{13}, $a_{23} \ldots$ die Coefficienten der gegenseitigen Induction, P_μ die constante elektromotorische Kraft; ferner ist b_{11} der Widerstand des ganzen ersten Umlaufes, b_{22} der des ganzen zweiten Umlaufes u. s. w. und b_{12} der Widerstand jenes Stückes der Leitung, das dem 1. und 2. Umlaufe gemeinsam ist; b_{12} ist positiv, wenn J_1 und J_2 dieselbe, negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtungen haben. Die Ausführung der Minimumsbedingung $\frac{\partial Z}{\partial Q_1} = 0$ liefert: $Q_1 = 0$

$$\text{d. i. } P_1 = b_{11} J_1 + b_{12} J_2 + \ldots + b_{1n} J_n + \frac{d}{dt}[a_{11} J_1 + a_{12} J_2 + \ldots] \quad (4) \quad \text{u. s. w.}$$

Das sind — etwas verallgemeinert — jene Gleichungen, die Herr H. von Helmholtz 1851 (Abhandl. I 435) für die Induction in linearen Stromverzweigungen, die man sich in die möglichst geringe Zahl einfacher Umgänge zerlegt denken muss, aufgestellt hat.

Für die Arbeit der verzögernden Kräfte erhält man vom Zeichen abgesehen: $\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_1} d p_1 + .. = \Big[\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_1} \dot{p}_1 + ..\Big] dt = 2 F dt$ $= [b_{11} J_1^2 + b_{22} J_2^2 + .. + 2 b_{12} J_1 J_2 + ..] \, dt$ d. i. die Joule-sche Wärme und sind alle Summanden in der Klammer positiv.

Nun werde angenommen, dass $a_{12} = a_{13} = a_{23} = .. = 0$; $a_{11} = a_{22} = a_{33} = .. = a$ sei, welcher Fall experimentell unschwer zu verwirklichen wäre. Dann wird:

Die Ausführung der Minimumsbedingungen ergiebt:

$$A_{11} R + Q_2 [\dot{p}_1 A_{12} - \dot{p}_2 A_{11}] + Q_3 [\dot{p}_1 A_{13} - \dot{p}_3 A_{11}] = 0$$
$$A_{12} R + Q_2 [\dot{p}_1 A_{22} - \dot{p}_2 A_{12}] + Q_3 [\dot{p}_1 A_{23} - \dot{p}_3 A_{12}] = 0$$
$$A_{13} R + Q_2 [\dot{p}_1 A_{23} - \dot{p}_2 A_{13}] + Q_3 [\dot{p}_1 A_{33} - \dot{p}_3 A_{13}] = 0$$

oder, da die Determinante dieses Systems $\dot{p}_1^2 \,|A_{\mu\nu}| = \dot{p}_1^2 \cdot D^2$ nie verschwindet, $R = 0$ und $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ d. i. das Princip von der Energie und die Lagrange'schen Gleichungen.

Eliminirt man in der allgemeinen Gleichung $A_{1\nu} Q_1 + A_{2\nu} Q_2 + \ldots + A_{\nu n} Q_n = 0$, $\nu = 1 \ldots n$ etwa Q_1, mit der Relation: $R = \dot{p}_1 Q_1 + \ldots$ so folgt natürlich ebenso: $R = 0$, $Q_2 = 0 \ldots Q_n = 0$.

Nachtrag,

betreffend lineare Stromverzweigungen.

Sind $p_1 \ldots p_n$ wiederum cyklische Coordinaten, $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + \ldots + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots$ die lebendige Kraft und ist $F = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + \ldots + b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots$ die von Lord Rayleigh eingeführte Zerstreuungsfunktion, so kommt zu jeder Kraft P_μ noch die Kraft: $-\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\mu} = -(b_{1\mu} \dot{p}_1 + b_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots)$ dazu und es ergiebt das Princip des kleinsten Zwanges, dass

$$Z \cdot D = \Sigma A_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu = A_{11} Q_1^2 + A_{22} Q_2^2 + \ldots + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \ldots \quad (1)$$

ein Minimum für jedes Q sein müsse; dabei ist also:

$$Q_\mu = \frac{d}{dt}\left[a_{1\mu} \dot{p}_1 + a_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots\right] - P_\mu + \left[b_{1\mu} \dot{p}_1 + b_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots\right] \quad (2)$$

$$D = |a_{\varkappa\lambda}| \qquad A_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial D}{\partial a_{\varkappa\lambda}}$$

Ueber die Erzlagerstätte von Goldkronach bei Berneck im Fichtelgebirge.

Von F. v. Sandberger.

(*Eingelaufen 5. Mai.*)

Die seit Jahrhunderten bekannte Lagerstätte ist grösstentheils schon längere Zeit ausser Betrieb und es war mir daher nicht mehr möglich, als ich sie im Jahre 1884 besuchte, mehr als eine Anzahl Erzstufen auf den Halden zu finden, unter welchen derber Antimonglanz und Bruchstücke des völlig mit Kiesen imprägnirten Nebengesteins vorherrschten. Gegenwärtig wird nur die Grube Schickung Gottes wieder betrieben, auf wie lange, ist nicht vorauszusehen. Seitdem hat C. W. v. Gümbel Goldkronach in der Geognostischen Beschreibung des Fichtelgebirges S. 385 ff. eine gründliche von einer Gangkarte begleitete Darstellung gewidmet, die auf den Gängen auftretenden Mineralien aber nicht specieller geschildert. Da diese indessen in vieler Beziehung bemerkenswerth und in Folge früherer Einsendungen des K. Bergamts Bayreuth in der unter meiner Leitung stehenden Sammlung der Universität Würzburg fast vollständig vertreten sind, war ich in der Lage, sie genauer untersuchen zu können. In der Sammlung des Herrn Apotheker Dr. Schmidt zu Wunsiedel befinden sich auch Mineralien von Goldkronach, namentlich schöne Krystalle von Antimonglanz und ein Stück mit

$Q_\mu = a \frac{d}{dt}[J_1 + J_2 + ..] - P_\mu + b_{1\mu} J_1 + b_{2\mu} J_2 + ..$ und es muss: $Z \cdot a = Q_1^2 + Q_2^2 + ..$ ein Minimum sein, wie klein auch a genommen wird. Für $\lim a = 0$ werden die Stromstärken unabhängig von der Zeit, also constant und es folgt aus der Bedingung: $Z^1 = Q_1^2 + Q_2^2 + .. =$ Minimum; $Q_\mu = b_{1\mu} J_1 + .. - P_\mu = 0$.

Die Gleichung: $\frac{\partial Z^1}{\partial Q_\mu} = 0$ kann, weil die Determinante aus den b nicht verschwindet, durch: $\frac{\partial Z^1}{\partial J_\mu} = 0$ ersetzt werden. Es ist demnach für constante Ströme: $Z^1 = \sum_\mu [(b_{1\mu} J_1 + ..) - P_\mu]^2$ für jedes J zu einem Minimum zu machen.

Anmerkung. Eine oft genannte Minimumseigenschaft für constante Ströme ergiebt sich aus der wohlbekannten Gleichung:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = -2F \text{ oder: } -\left[\frac{dU}{dt} + F + \frac{dT}{dt}\right] = F \quad \text{(I)}$$

worin: $U = P_1 p_1 + ..$ das Potential der constanten Kräfte vorstellt und wie oben: $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + .. = \frac{1}{2} a_{11} J_1^2 + ..$ $F = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + .. = \frac{1}{2} b_{11} J_1^2 ..$ ist.

Erlangen die Stromstärken: $J_1, J_2 ..$ die anfangs Null waren, für $t = \infty$ ihre vollen Stärken $J'_1, J'_2 ..$ so ist (wegen $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial J_1}\frac{dJ_1}{dt} + ..$) auch $\frac{dT}{dt} = 0$ und das in I rechts stehende F, das aus lauter positiven Gliedern besteht, erlangt seinen grössten Werth. Demnach wird die negative linke Seite in I d. i. $F + \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} b_{11} J_1^2 + .. - (P_1 J_1 + P_2 J_2 + ..)$ ein Minimum für jedes J darstellen.

Ueber die Erzlagerstätte von Goldkronach bei Berneck im Fichtelgebirge.

Von F. v. Sandberger.

(*Eingelaufen 5. Mai.*)

Die seit Jahrhunderten bekannte Lagerstätte ist grösstentheils schon längere Zeit ausser Betrieb und es war mir daher nicht mehr möglich, als ich sie im Jahre 1884 besuchte, mehr als eine Anzahl Erzstufen auf den Halden zu finden, unter welchen derber Antimonglanz und Bruchstücke des völlig mit Kiesen imprägnirten Nebengesteins vorherrschten. Gegenwärtig wird nur die Grube Schickung Gottes wieder betrieben, auf wie lange, ist nicht vorauszusehen. Seitdem hat C. W. v. Gümbel Goldkronach in der Geognostischen Beschreibung des Fichtelgebirges S. 385 ff. eine gründliche von einer Gangkarte begleitete Darstellung gewidmet, die auf den Gängen auftretenden Mineralien aber nicht specieller geschildert. Da diese indessen in vieler Beziehung bemerkenswerth und in Folge früherer Einsendungen des K. Bergamts Bayreuth in der unter meiner Leitung stehenden Sammlung der Universität Würzburg fast vollständig vertreten sind, war ich in der Lage, sie genauer untersuchen zu können. In der Sammlung des Herrn Apotheker Dr. Schmidt zu Wunsiedel befinden sich auch Mineralien von Goldkronach, namentlich schöne Krystalle von Antimonglanz und ein Stück mit

dem sehr seltenen Kupferkies. Ich statte Herrn Dr. Schmidt für die Mittheilung seiner Suite den besten Dank ab.

Das Grubenfeld[1]) umfasst eine bedeutende Fläche vom Weissmain-Thale längs dem Thale des Zoppatenbaches über das Dorf Brandholz hinaus, an welchem die bedeutendste Grube, die Fürstenzeche, gelegen ist, während andere auf beiden Seiten des Baches in der Nähe der Dörfer Zoppaten und Escherlich liegen. Dasselbe ist mit zahlreichen, z. Th. noch in diesem Jahrhundert von dem preussischen und später bayerischen Staate, dann von Gewerken betriebenen Bauten bedeckt. Es hätte keinen Zweck, die Entwickelung und den Untergang dieser Gruben im Einzelnen zu verfolgen, nur soviel muss hervorgehoben werden, dass die Gänge am Ausgehenden am reichsten an Gold und Silber gewesen sein müssen. Diese Thatsache erklärt sich hier, wie überall, durch lange fortgesetzte Verwitterung, welche die edlen Metalle als solche abschied, während die übrigen gelöst und weggeführt wurden, wie auch v. Gümbel[2]) mit Recht annimmt. Um auf sicherem Boden zu bleiben, beschränke ich mich auf die von ihm hauptsächlich nach Hahn's Berichten gegebene Darstellung der Hauptgänge, muss aber zunächst Bemerkungen über die Gesteine vorausschicken, in welchen dieselben aufsetzen.

Das herrschende Nebengestein ist ein Sericitschiefer von cambrischem Alter, welcher manchen des Taunus sehr ähnlich sieht, so dass man wohl Handstücke verwechseln könnte, auch einige sächsische und böhmische Phyllite sind nahe verwandt.

Die grünlichen Schiefer enthalten neben vorwiegendem Sericit auch noch Quarzkörner und Chloritschüppchen; im Schlämmrückstande befindet sich mikroskopisches Magneteisen

---

1) Siehe das Kärtchen bei v. Gümbel a. a. O. S. 386a.

2) a. a. O. S. 301.

und Eisenkies. Die blassgelb gefärbten Schiefer enthalten weder Chlorit noch Magneteisen und nur sehr wenig mikroskopischen Eisenkies, aber stets Quarzkörnchen, sie sind fast als reiner Sericit anzusehen. Dem entspricht auch das Resultat der Analysen von Ad. Schwager.[1]) Es enthielten nämlich

	1. Ausgesuchter Sericit von Goldkronach nach Schwager	2. Reiner Sericit von Naurod nach List	3. Nicht ganz reiner Sericit von Naurod nach Schwager
Kieselsäure	45,88	49,00	49,53
Titansäure	—	1,59	—
Thonerde	33,96	23,65	28,97
Eisenoxyd	4,57	8,07	7,26
Kalk	0,22	0,63	0,14
Bittererde	0,83	0,93	2,46
Kali	9,32	9,11	7,43
Natron	0,52	1,75	0,12
Wasser und Glühverlust	4,89	3,44	4,97
	100,26	98,17[2])	100,88[3])

Um etwa in geringer Menge vorhandene Metalle im Goldkronacher Gestein zu entdecken, wurden wiederholt 10—12 g des Gesteinspulvers mit kohlensaurem Natronkali aufgeschlossen. Nach Abscheidung der Kieselsäure ergab Schwefelwasserstoffgas in der salzsauren Lösung einen Niederschlag, welcher vorwiegend Antimon, weniger Arsen und recht wenig Blei und Kupfer enthielt; Kobalt wurde nach Abscheidung des Eisens ebenfalls in sehr geringer Menge

1) v. Gümbel, Sitzungsber. d. k. b. Akad. d. Wissensch., math.-naturw. Cl. 1880, S. 228 ff.

2) Ausserdem Fluorsilicium 1,69, Phosphorsäure 0,31.

3) In 12 g desselben ausserdem Arsen, sehr wenig Blei und Zink. (Sandberger.)

nachgewiesen. Diese Elemente habe ich meistens schon 1882 als in dem Gestein von Goldkronach enthalten angeführt.[1]) Um sich zu überzeugen, ob nicht eins oder das andere derselben aus dem in minimaler Menge eingesprengten Eisenkiese herrühre, wurde dieser für sich untersucht und frei davon gefunden. Antimon u. s. w. gehören also der Sericitsubstanz an, wie an so vielen anderen Orten den Glimmern, z. B. jenen der Gneisse des Spessarts, dem des Granits von Magurka in Ungarn u. s. w. Dass Antimon (und Arsen) in den Silicaten als antimonige (bezw. arsenige) Säure als Vertreter von Thonerde auftreten, ist unzweifelhaft, der Spinell von Tiriolo in Calabrien hat ja längst den Beweis geliefert.

Organische Substanz ist beim Glühen deutlich wahrnehmbar und findet sich in Spuren auch noch in stark zersetzten Schiefern. Wo sie in grösserer Menge und schwarz färbend auftritt, sind die Schiefer der Erzführung ungünstig gewesen.[2])

Schliesslich wurden auch die in Wasser löslichen Bestandtheile untersucht. Zieht man den Goldkronacher Schiefer 2 Tage mit destillirtem Wasser in der Wärme aus, so giebt die Lösung sehr deutliche Reactionen auf Schwefelsäure und schwächere auf Chlor, welche an Kali gebunden sind; Natron tritt nur in geringster Menge daneben auf.

Die in der Nähe der Gänge vorkommenden stark gebleichten Schiefer sind wie so viele andere ausgelaugte Sericitgesteine ganz zu Schüppchen aufgelöst. Ebenso verhalten sich die zahlreichen Bruchstücke derselben, welche in der Gangmasse eingeschlossen sind.

Ein zweites Nebengestein kommt nur an dem Gange der Grube Silberne Rose bei Zoppaten vor und soll dessen

1) Untersuchungen über Erzgänge I S. 31, II S. 236.

2) v. Gümbel, Geogn. Beschreib. d. Fichtelgebirgs S. 385.

Hangendes bilden, während als Liegendes Sericitschiefer angegeben wird. Es ist ein feinkörniger Diabasmandelstein (Blatterstein) von graugrüner Farbe, welche in der Nähe des Ganges lichter wird, und führt ausser zahlreichen von Chlorit umschlossenen Kalkspathmandeln auch Gruppen von Eisenkieskrystallen. Weisser Kalkspath bedeckt in dünnen Ueberzügen auch seine zahlreichen Klüftchen. Ein grösseres verhältnissmässig frisches Stück dieses bereits v. Gümbel[1]) angeführten Gesteins lässt in der matten Grundmasse stellenweise noch Plagioklaskrystalle erkennen, der Augit scheint aber schon ganz in Chloritsubstanz umgewandelt zu sein. Magnetkies und Magneteisen sind in mikroskopischen Körnchen in dem Schlämmreste deutlich nachweisbar, auch Apatit fehlt nicht.

Kalte Salzsäure löst Kalkspath und Magnetkies auf, erhitzte zersetzt auch den Chlorit und die meist schon stark angegriffenen Reste des Feldspaths.

Die Lagerung des Gesteins ist nicht genau bekannt, doch darf mit grosser Wahrscheinlichkeit angenommen werden, dass dasselbe einen kleinen Stock oder Gang in dem Sericitgesteine bildet.

Die bei Zoppaten anstehenden schwarzen silurischen Gesteine mit Graptolithen treten, soviel bekannt, zwar sehr nahe an den Gang heran, kommen aber mit ihm nicht in unmittelbare Berührung.

Wie v. Gümbel folge auch ich in Bezug auf die Auffassung der Gänge den Mittheilungen des langjährigen Leiters des Grubenbetriebs, Bergrath Hahn in Bayreuth. Die Lage derselben ist auf dem von ersterem beigegebenen Revierkärtchen gut zu übersehen.

Hahn nimmt bei Brandholz drei Hauptgänge an, nämlich den Kiesgang mit h. 2,4 Streichen und 60° südöstlichem

1) a. a. O. S. 393.

Einfallen, den Spiessglanzgang h. 12,7 streichend und den Quarzgang, welcher zu Anfang der sechziger Jahre aufgeschlossen, aber wegen der Armuth seiner Erze nicht weiter bebaut wurde. Auch die letzteren Gänge fallen südöstlich. Die Gänge der Grube Silberne Rose bei Zoppaten, deren Streichen 4 h 5 mit 50° Fallen zu sein scheint, und Schickung Gottes bei Escherlich, h. 1,8 streichend, sind offenbar selbstständig, obwohl ihre Ausfüllung dieselbe ist, wie jene des Spiessglanzganges. Was die Mächtigkeit betrifft, so wird für den Kiesgang $1^1/_2$ m als Maximum angegeben, für den Spiessglanzgang 1 m, gewöhnlich scheint sie aber geringer zu sein, ich habe an Handstücken meist nur 10 cm beobachten können. Es giebt zwar noch manche Erzgänge, an welchen das sogenannte höfliche d. h. an eingesprengten Erzen reiche Nebengestein[1]) entwickelt ist, aber mit Ausnahme von solchen der Gegend von Freiberg,[2]) Schapbach und Wittichen, sowie mancher Zinnerzgänge habe ich es doch anderswo nicht leicht so schön gesehen. Neben dem Kiesgange und bis zu beträchtlicher Entfernung von ihm führt der stark gebleichte und hier und da von weissen Quarztrümern durchsetzte Schiefer zahllose bis erbsengrosse Eisenkieskrystalle. Die Formen $\frac{\infty O 2}{2}$, $\infty O \infty$. $\frac{\infty O 2}{2}$ und seltener auch $\infty O \infty$. O sind meist sehr hübsch entwickelt. Der Arsenikkies in den Formen ∞P. $^1/_4 \breve{P} \infty$ ist weniger häufig, fehlt aber doch selten ganz. Der durchschnittliche Goldgehalt der Kiese wird nur auf $^1/_4$ bis $^1/_3$ Loth im Centner angegeben und der Betrieb konnte daher nicht lohnend sein.

Die Gangausfüllung, welche sehr gewöhnlich Brocken von zersetztem Nebengestein umschliesst, zeigt nur selten

---

1) Untersuchungen über Erzgänge I S. 149.

2) Vortrefflich beschrieben aber nicht erklärt von Vogelgesang (Cotta's Gangstudien II S. 80) und Frenzel (Min. Lexikon für Sachsen S. 28).

Das Gold ist silberhaltig und darum licht gefärbt, das Verhältniss von Silber zu Gold ist in den wenigst reichen Proben 4:1, aber in anderen wohl höher.

2. Eisenkies ist in grosser Menge in bis erbsengrossen Krystallen $\frac{\infty O 2}{2}$, $\frac{\infty O 2}{2}$. $\infty O \infty$, selten auch mit O combinirt in dem höflichen Nebengestein, aber stellenweise auch im weissen Quarze der Gänge eingewachsen und stets schwach silber- und goldhaltig. Der Gehalt an Gold ist sowohl durch die hüttenmännische Probe als auch auf nassem Wege durch Behandlung des scharf gerösteten Erzes mit alkoholischer Jodlösung nach der Methode von Skey (Dingler's Journal CXC. S. 58) nachgewiesen worden. Ausser den erwähnten Elementen enthält das Mineral zuweilen noch sehr wenig Kobalt und Arsen, aber keine Spur von Antimon.

3. Arsenikkies. Verhält sich wie der Eisenkies, ist aber nicht ganz so häufig. Schöne Krystalle zeigen die Form $\infty P. \frac{1}{4} \breve{P} \infty$, sind aber stets ziemlich klein. Da mich der Arsenikkies wegen seines Antimongehaltes lebhaft interessirte, so wurde er näher untersucht. Das specifische Gewicht ergab sich zu 6,09 bei 4° C. Die quantitative Analyse hatte Herr Hofrath Hilger freundlichst übernommen, der Gehalt an Silber wurde in der K. K. Probiranstalt zu Přibram auf trockenem Wege bestimmt, wobei sich auch ein sehr kleiner Goldgehalt ergab. Das schon einmal gelegentlich[1]) mitgetheilte Resultat der Analyse war folgendes:

Schwefel	20,84		
Arsen	41,36		43,65 As
Antimon	3,73	entspr. 2,29 As	
Eisen	34,07		
Kobalt	Spur		
Silber	0,002		
	100,002.		

1) Jahrb. f. Mineralogie 1890 I S. 99.

f) 1. Derber Plagionit. 2. Eisenspath in Rhomboëdern. 3. Meneghinit in netzförmigen Aggregaten.

g) 1. Weisser derber Quarz. 2. In Höhlungen Krystalle desselben. 3. Magnetkies $0P . \infty P$ in kleinen Krystallgruppen. 4. Bleihaltiges Federerz, haarförmig.

h) 1. Weisser Quarz mit eingesprengtem Antimonglanz. 2. Eisenspath in linsenförmigen Rhomboëdern. 3. Strahliger Antimonglanz in Krystalle der Form $\infty P . \frac{1}{3} P . \infty \bar{P} 2$ auslaufend. 4. Antimonocker auf Klüften.

i) 1. Blass fleischrother Braunspath in grosskörnigen Massen und Rhomboëdern. 2. Strahliger Antimonglanz wie oben.

k) 1. Quarz. 2. Derber Antimonglanz, an der Oberfläche erdig und voll von Höhlungen, z. Th. mit gediegenem Antimon. 3. Antimonglanz in den oben angegebenen Formen krystallisirt. 4. Kalkspath in kleinen verzerrten Krystallen $R^3 . \infty R$.

l) 1. Weisser Quarz. 2. Strahliger Antimonglanz gemengt mit wenig gelbbrauner Zinkblende.

m) 1. Antimonglanz in der gewöhnlichen Form krystallisirt. 2. Antimonblüthe in Büscheln farbloser Nadeln. (Schmidt'sche Sammlung).

II. Silberne Rose bei Zoppaten.

1. Diabasmandelstein s. oben. 2. Lichter Braunspath, dünne Lage. 3. Grossstrahliger Antimonglanz. Quarz fehlt auffallender Weise hier völlig.

Es wird nun nöthig sein, die einzelnen Mineralien der Gänge etwas genauer zu betrachten.

1. Gediegen Gold habe ich nur einmal eingewachsen in bläulichem Quarze mit Kiesen gesehen, aber es kam ausserdem auch in grösseren Körnern und Blättchen vor und ist in früherer Zeit jedenfalls auch an dem verwitterten Ausgehenden und im Alluvialschutt reichlich getroffen worden.[1])

---

1) v. Gümbel, Geognost. Beschreibung des Fichtelgebirges S. 301.

in Ungarn und Rattenberg in Tyrol, wo der verhältnissmässig junge Antimonglanz eines der Auslaugungsprodukte von Fahlerzen bildet.

Von Oxydationsprodukten kommen spärlich Antimonocker und Antimonblüthe vor, s. diese.

5. Nach Originalstücken, welche Herr Bergrath Hahn zur Sammlung des k. Oberbergamtes eingesendet hat, kommt in drusigen Höhlungen ausgeschieden auch gediegen Antimon vor.

6. Plagionit. Ist zu Goldkronach nicht häufig und findet sich in meist vereinzelten Krystallen oder derb. Die Flächen 0 P und — P treten nicht selten in oscillatorischer Combination mit Pyramiden auf und sind daher parallel den Combinationskanten stark gefurcht, wie zu Wolfsberg[1]), gut zu erkennen ist + P, ∞ P ∞ und — 4 P. Leider sind die Krystalle aufgewachsen und mit einander verwachsen, so dass genaue Bestimmungen der Flächen z. Z. unausführbar erscheinen. Mit dem Wolfsberger Vorkommen, von welchem die Würzburger Sammlung ein gutes Stück enthält, könnte unseres geradezu verwechselt werden. Ausserdem ist der Plagionit eingesprengt und derb beobachtet worden. Die derbe Varietät ist wiederholt irrig für Fahlerz und Bournonit gehalten worden, welche zu Goldkronach nicht vorkommen. Der derbe Plagionit enthält wie der krystallisirte kein Kupfer. Er findet sich auch zu Wolfsberg und bei Arnsberg in Westphalen,[2]) hier mit kleinen Drusen, in welchen Kryställchen 0 P. — P nicht selten sind.

7. Meneghinit. Langgestreckte, bis 5 mm lange und 1 $^1/_2$ mm breite, stets schilfähnlich gestreifte Säulen von bleigrauer Farbe, welche sich den „Sagenit" genannten Rutilaggregaten ähnlich häufig unter 40° kreuzen, bedecken derben Plagionit oder finden sich mit Eisenspath verwachsen

1) Lüdecke, Jahrb. f. Min. 1883 II S. 115.

2) Sandberger, Jahrb. f. Min. 1883 II S. 94.

Ein Arsenikkies von dieser Zusammensetzung war bisher nicht bekannt, denn Breithaupt's Geyerit, welcher auch 1,37 Antimon enthält, gehört nach Behnkes Analyse nicht hierher, sondern zu den vielen Mittelgliedern zwischen Arsenikkies und Arseneisen.

4. Antimonglanz. Ist nächst den Kiesen das häufigste und in Masse vorkommende Mineral der Gänge, welches früher hauptsächlich wegen seines Silber- und Goldgehaltes geschätzt wurde, der aber nicht hoch ist, da in einer reinen Probe zu Přibram nur 0,0016 Silber nebst Spuren von Gold gefunden wurde. Gegenwärtig würden die hohen Antimonpreise ein erfreulicheres Resultat für die geförderten Erze liefern können, ob aber die noch von früherem Abbau her gebliebenen Reste eine Wiederaufnahme der Gruben räthlich erscheinen lassen, vermag ich nicht zu beurtheilen.

Der Antimonglanz kommt in vielerlei Abänderungen vor. Sehr häufig sind grossstrahlige Massen, deren Strahlen bis zu 92 mm Länge bei 8 mm Breite erreichen. Wechselnde Lagen von grossblätterigen mit feinkörnigen Aggregaten, welche sich der „Bleischweif" genannten Varietät des Bleiglanzes durchaus analog verhalten, sind schon seltener und solche von rein feinkörniger Struktur ebenfalls, aber auch an eingesprengten Körnern mit sehr schwach entwickelter Spaltbarkeit fehlt es nicht. Recht selten sind wohlausgebildete, aber nur 4 mm lange und 2 mm breite Krystalle der Form $\infty P. \, ^1/_3 \, P. \infty \bar{P} 2$ mit stark gestreiften Säulenflächen. Ich habe dieselben in zahlreichen Gruppen nur auf derbem an der Oberfläche mulmigem und mit zahlreichen Höhlungen versehenem, z. Th. mit gediegenem Antimon ausgefüllten Antimonglanz beobachtet. Es scheint demnach, als ob die Oberfläche von alkalischen Gewässern angenagt, aber das gelöste Schwefelantimon an Ort und Stelle wieder abgesetzt worden sei. Die eben genannte hübsche Combination kommt an vielen Orten vor, besonders schön auch bei Kapnik

welchen Breithaupt[1]) auch mit beiden zusammen beobachtet hat, ist mir in dieser Form nicht zu Gesicht gekommen.

11. Magnetkies in Gruppen kleiner rauhflächiger Tafeln (0 P. ∞ P) in Drusen des Quarzes aufsitzend ist sehr selten, war aber schon Breithaupt[2]) bekannt, seine Bedeckung durch Federerz habe ich schon erwähnt. In der Würzburger Sammlung ist nur ein Stückchen davon vorhanden.

12. Kupferkies habe ich nur an einem Stücke, welches der Schmidt'schen Sammlung angehört, in kleinen derben Massen mit Arsenikkies in weissem Quarze eingesprengt beobachtet.

13. Zundererz. Findet sich in dunkelrothen weichen Ueberzügen besonders auf Plagionit, ist aber recht selten. Es ist zwar jenem von Clausthal sehr ähnlich und enthält auch Blei wie dieses. Breithaupt (a. a. O.) erwähnt es auch von Goldkronach. Alles bisher Angeführte gilt auch für das von Hausmann[3]) constatirte Vorkommen des Zundererzes bei Wolfsberg. Seine hochrothe Färbung kann aber nicht von eingemengtem Rothgültigerze herrühren, da solches zu Goldkronach nicht vorkommt. Es besteht vielmehr offenbar wesentlich aus Rothspiessglanzerz im Gemenge mit einem Bleisalze und erdigem Plagionit.

14. Gelber erdiger Antimonocker erscheint hier und da auf Klüften von derbem Antimonglanz.

15. Antimonblüthe in strahligen Büscheln farbloser Krystalle auf Antimonglanz sitzend ist sehr schön in der Schmidt'schen Sammlung vertreten.

16. Steinmark. Weisse opake Massen, an welchen man unter dem Mikroskope zuweilen Krystallflächen wie bei dem sog. krystallisirten Kaolin zu bemerken glaubt, ist in geringer Menge über Quarz, häufig aber über Plagionit und Meneghinit zu beobachten. Das Löthrohr ergiebt reine Thonerdereaktion.

---

1) Paragenesis der Mineralien S. 192.

2) Ebenda S. 192.

3) Handbuch d. Mineralogie I S. 195.

in Drusen des Gangquarzes. Ueber ihr Krystallsystem lässt sich darum keine Gewissheit erlangen, weil die Enden nicht gut ausgebildet sind, sondern wie ausgefranst erscheinen und auch die Lage der etwaigen Spaltungsflächen nicht mit Bestimmtheit constatirt werden kann. Die Härte des spröden Minerals ergab sich zu 3, das spec. Gewicht zu 6,4. Vor dem Löthrohre schmilzt das Mineral leicht unter Bedeckung der Kohle mit Beschlägen von Antimon- und Bleioxyd, von heisser Salzsäure wird es unter Entwickelung von Schwefelwasserstoff leicht gelöst. Als Bestandtheile wurden qualitativ Blei, Antimon und Schwefel nachgewiesen. Eine zuverlässige quantitative Analyse konnte bisher wegen Mangel an Material nicht ausgeführt werden.

Der von Groth[1]) angeführte Antimonglanz von Goldkronach in sagenitähnlichen Aggregaten gehört zweifellos hierher.

8. Federerz. Haarförmige bleigraue Kryställchen, welche Plagionit umhüllen oder auf Meneghinit oder Magnetkies aufgewachsen sind, reagiren auf Antimon, Blei und Schwefel, sind also ächtes Federerz, welches auch äusserlich mit jenem von Wolfsberg auf das Genaueste übereinstimmt und daher wohl auch als haarförmiger Jamesonit zu betrachten ist. Es findet sich immer nur in sehr geringer Menge und eine quantitative Analyse war daher nicht möglich. Ein eigenthümliches Vorkommen ist jenes von der Schmutzlerzeche, wo Federerz in Tausenden von haarfeinen Kryställchen grossblätterigen Braunspath erfüllt und schwarz färbt.

9. Bleiglanz ist mir in mittel- und feinkörnigen Aggregaten, auch mit Antimonglanz gemengt bekannt geworden. An einem Stückchen fand sich auch ein deutlicher Würfel. Häufig war das Mineral nicht.

10. Zinkblende von braungelber Färbung kommt selten im Gemenge mit strahligem Antimonglanz vor. Bleiglanz,

1) Mineralien-Sammlung der Universität Strassburg S. 22.

welchen Breithaupt[1]) auch mit beiden zusammen beobachtet hat, ist mir in dieser Form nicht zu Gesicht gekommen.

11. Magnetkies in Gruppen kleiner rauhflächiger Tafeln (0 P. ∞ P) in Drusen des Quarzes aufsitzend ist sehr selten, war aber schon Breithaupt[2]) bekannt, seine Bedeckung durch Federerz habe ich schon erwähnt. In der Würzburger Sammlung ist nur ein Stückchen davon vorhanden.

12. Kupferkies habe ich nur an einem Stücke, welches der Schmidt'schen Sammlung angehört, in kleinen derben Massen mit Arsenikkies in weissem Quarze eingesprengt beobachtet.

13. Zundererz. Findet sich in dunkelrothen weichen Ueberzügen besonders auf Plagionit, ist aber recht selten. Es ist zwar jenem von Clausthal sehr ähnlich und enthält auch Blei wie dieses. Breithaupt (a. a. O.) erwähnt es auch von Goldkronach. Alles bisher Angeführte gilt auch für das von Hausmann[3]) constatirte Vorkommen des Zundererzes bei Wolfsberg. Seine kirschrothe Färbung kann aber nicht von eingemengtem Rothgültigerze herrühren, da solches zu Goldkronach nicht vorkommt. Es besteht vielmehr offenbar wesentlich aus Rothspiessglanzerz im Gemenge mit einem Bleisalze und erdigem Plagionit.

14. Gelber erdiger Antimonocker erscheint hier und da auf Klüften von derbem Antimonglanz.

15. Antimonblüthe in strahligen Büscheln farbloser Krystalle auf Antimonglanz sitzend ist sehr schön in der Schmidt'schen Sammlung vertreten.

16. Steinmark. Weisse opake Massen, an welchen man unter dem Mikroskope zuweilen Krystallflächen wie bei dem sog. krystallisirten Kaolin zu bemerken glaubt, ist in geringer Menge über Quarz, häufig aber über Plagionit und Meneghinit zu beobachten. Das Löthrohr ergiebt reine Thonerdereaktion.

---

1) Paragenesis der Mineralien S. 172.

2) Ebenda S. 192.

3) Handbuch d. Mineralogie I. S. 175.

17. Schwerspath wird von v. Gümbel[1]) als Seltenheit von der Grube Schickung Gottes angeführt, ich habe ihn nicht gesehen.

18. Braunspath. Ist auf den Gängen ziemlich verbreitet, aber in Folge seines hohen Eisenoxydulgehaltes meist schon mehr oder weniger stark zersetzt. Das frischeste Stück mit erbsengrossen rauhflächigen, aber nicht gekrümmten Rhomboëdern, deren Winkel über 106° betragen, gehört der Schmidt'schen Sammlung an. Das Mineral ist im Grossen blass fleischroth gefärbt, die kleineren Spaltungsstückchen sind aber weiss wie auch das Pulver. Das spec. Gewicht beträgt 3,05. Die quantitative Analyse des Herrn Hofrath Hilger in München ergab als Zusammensetzung:

Kohlensaures Eisenoxydul . .	18,470
kohlensaures Manganoxydul . .	3,063
kohlensaurer Kalk . . .	56,066
kohlensaure Bittererde . .	21,997
	99,596.

19. Eisenspath. Kleine linsenförmige Rhomboëder kommen nicht häufig in Drusen des Gangquarzes mit Meneghinit oder Antimonglanz verwachsen vor. Der Spath ist chemisch rein, d. h. er enthält keinen Kalk und Bittererde.

20. Kalkspath. Gehört zu den allerjüngsten Bildungen und sitzt in kleinen verzerrten Krystallen der Form $R^3 . \infty R$ über krystallisirtem Antimonglanz. Der Kalkspath gehört zweifellos der Breithaupt'schen Varietät diamesus syngeneticus an und ist recht selten.

Aus dem Vorhergehenden geht mit aller Bestimmtheit hervor, dass die Elemente von sämmtlichen auf den Erzgängen vorkommenden Mineralien in dem Sericitschiefer und nur in diesem auftreten, an welchen ja auch die Erzgänge gebunden sind. Die Proterobasdurchbrüche mögen wohl

1) a. a. O. S. 301.

bei der Aufreissung der Gangspalten mitgewirkt haben, Erze haben sie denselben aber nicht zugebracht, da ihnen die Elemente derselben fehlen. Ebenso verhält es sich auch nach Liebe's[1]) vortrefflicher Schilderung in der Gegend von Schleiz u. a. O. der reussischen Fürstenthümer.

Es fragt sich nun, wie man sich die Ausfüllung der Gänge zu denken hat. Die drei häufigsten Erze sind unzweifelhaft Eisenkies, welcher vorzugsweise in dem höflichen Nebengestein und ebenso wie dort mit Arsenikkies in den lichten derben Quarzen auftritt, dann Antimonerz, vor Allem Antimonglanz. Die Sericitschiefer enthalten, wie oben nachgewiesen, stets schwefelsaures Kali und organische Substanz, welche dasselbe zu Schwefelkalium reduciren konnte und zweifellos reducirt hat. Wo dies der Fall war, musste die organische Substanz grösstentheils verschwinden und wo sie noch in grösserer Menge vorhanden ist, hat daher dieser Reductionsprocess, dessen Produkte die Erze aus dem Schiefer auslaugen und den Gangspalten zuführen konnten, nicht oder nur in geringem Grade stattgefunden. Das Fehlen der Erze an diesen dunklen Gesteinen erklärt sich damit von selbst.

Sobald sich in dem Schiefer, welcher 4 $^{1}/_{2}$ proc. Eisenoxyd enthält, dieses gleichfalls unter Mitwirkung organischer Substanz zu kohlensaurem Oxydul umgewandelt hatte, wurde es von Schwefelkalium ausgefällt und fixirt. Da auch Schwefelgold in Schwefelkalium löslich ist, so ist dieses gleichfalls ausgelaugt und mit dem Schwefeleisen niedergeschlagen worden, ebenso auch das Silber.[2]) Die Auslaugung des Eisens im Nebengesteine dauerte nur so lange fort, bis das Gestein breiartig erweicht war und daher den Flüssig-

1) Uebersicht über den Schichtenaufbau Ost-Thüringens in Abhandlungen zur geolog. Karte von Preussen und den Thüring. Staaten, Bd. V 4. S. 515.

2) Dieses kann sehr wohl ursprünglich als Chlorsilber-Chlorkalium ausgezogen und durch Schwefelkalium zersetzt worden sein.

keiten keine ungehinderte Bewegung nach der Gangspalte mehr gestattete; dann war aber der Quarz, welcher diese allmählich ausfüllte, natürlich sehr arm an Erzen, wie der sogenannte Quarzgang deutlich beweist. Es giebt ja auch sonst im Erzgebirge, Schwarzwald, Alpengebirge und rheinischen Schiefergebirge Gänge genug, an welchen die gleiche Erscheinung zu beobachten ist.

Aehnlich dem Eisenkiese verhält sich der weniger häufige Arsenikkies, welcher im Gegensatze zu dem von Antimon ganz freien Eisenkies ausnahmsweise bereits 3,7 proc. Antimon enthält. Aber sowohl der bleihaltige Meneghinit als der Antimonglanz selbst sind jünger als die eisenhaltigen Kiese und treten erst nach jenen auf. Besonders deutlich sieht man das auf Klüftchen des „höflichen“ Nebengesteins und auf solchen derjenigen Gänge, welche in weissem Quarz eingesprengte Kiese enthalten. (Paragenetische Beispiele a und b.) Die weit grössere Affinität von Eisen zu Arsen als zu Antimon tritt hier ebensowohl hervor als an anderen Orten, z. B. zu Thomasschlag in Böhmen; auch auf den Bräunsdorfer Gängen, welche in Folge von grossem Ueberschusse von Antimon im Nebengesteine sogar Verbindungen desselben mit Eisen (Berthierit) enthalten, ist der schwach silberhaltige Arsenikkies (Weisserz) älter als die Antimonerze.[1]) Das erklärt sich durch den Umstand, dass Schwefelkalium-Schwefelarsen leichter löslich als die entsprechende Antimonverbindung ist, aber auch von Eisensalzen leichter zersetzt wird, als diese.

Dem massenhaften Auftreten des Antimonglanzes ging zu Goldkronach das verhältnissmässig seltene von zwei bleihaltigen Antimonerzen, dem Plagionit und Meneghinit, voraus, welche vermuthlich nur lokale Bildungen an solchen Stellen sind, wo Blei in grösserer Menge vorhanden war. Das bleihaltige Federerz ist nur eine ganz lokale Erscheinung, gehört aber auch zu den älteren Gliedern der Gangausfüllung,

1) H. Müller in v. Cotta's Gangstudien I S. 181.

Ueber die Hirne verschiedener Hunderacen.

Von N. Rüdinger.

(*Eingelaufen 2. Juli.*)

Die folgenden vorläufigen Mittheilungen betreffen die Ergebnisse einer mehrjährigen Untersuchung an den Hirnen verschiedener Hunderacen, insbesondere die Feststellung des „absoluten und relativen Gehirngewichts" bei denselben.

Bei der Bestimmung des Körpergewichtes der Hunde hat sich ergeben, dass dasselbe bei einer und derselben Race und bei gleichem Alter der Thiere eine grosse Schwankung haben kann, welche wesentlich abhängig ist von der grösseren oder geringeren Fettablagerung und dem Grade der Muskelausbildung bei den verschiedenen Thieren.

Man erhält daher bei den Gewichtsbestimmungen des Körpers und des Hirns an mehreren Hunden zuweilen Zahlen, welche bei der Berechnung des relativen Hirngewichtes keinen korrekten Ausdruck geben. Zwei gleichschwere Hirne zweier Hunde, welche gleichgross und gleichaltrig sind, aber in Folge einer bedeutenden Fettablagerung bei dem einen und hochgradiger Magerkeit bei dem andern Thier ganz ungleiche Körpergewichte zeigen, ergeben bei der Berechung des relativen Gewichtes auffallende Unterschiede. Diese Differenzen mögen ausgleichbar werden, wenn eine grössere Untersuchungsreihe, als dies zur Zeit der Fall ist, vorliegt, und dann nur

Die Goldkronacher Erzlagerstätten liefern wieder einen schönen Beleg für die Ausfüllung der Gangspalten durch Auslaugungsprodukte des Nebengesteins und gehören zu jenen, deren Antimonglanz als primitiver Körper auftritt und nicht, wie das sonst so oft vorkommt, als Zersetzungsprodukt älterer Erze, namentlich Fahlerze angesehen werden kann. Ihnen überaus ähnlich verhalten sich zunächst die Gänge der Gegend von Schleiz, jene von Wolfsberg am Harze, sowie zahlreiche andere, welche in Glimmer- und Sericitschiefer der Alpen, in Böhmen, bei Welschsteinach im Kinzigthale, St. Trudpert im Münsterthale[1]) und Sulzburg im Schwarzwald vorkommen. Ausserdem finden sich goldhaltige Antimonglanze auch in Gängen des Dacits, aber auch in älteren Gesteinen Ungarns und Siebenbürgens[2]) und in den Gneissen der Alpen (Gastein, Rauris u. s. w.) und Böhmens (Michelsberg u. a. O.), sowie im Granit z. B. bei Magurka, Bocza und Lubella in Ungarn, Schönberg, Mileschau und Bitis in Böhmen, um nur bekanntere europäische Vorkommen zu citiren.

Die Goldkronacher Gänge vertauben in geringer Tiefe gänzlich, so der Hauptgang bei 71 m unter der tiefsten Stollensohle, der Schickung Gottes-Gang sogar schon bei 45 m unter Tag.

Es ist nicht meine Aufgabe, auch die Grubenbauten und deren Erträge zu schildern, da alles Nöthige in v. Gümbels Darstellung geboten ist. Leider muss man nach aufmerksamer Würdigung derselben auch seinem Endurtheile beistimmen, dass dieses Grubenfeld wohl niemals wieder eine Blüthezeit erleben wird.

---

1) Der Antimonglanz wurde s. Z. von Walchner und später auch von G. Leonhard irrig als Zinkenit angesehen, der im Schwarzwald nur bei Hausach vorkommt.

2) Zu Hideg-Szamos ist Sericitschiefer das unmittelbare Nebengestein, wie zu Goldkronach.

Ueber die Hirne verschiedener Hunderacen.

Von N. Rüdinger.

(*Eingelaufen 2. Juli.*)

Die folgenden vorläufigen Mittheilungen betreffen die Ergebnisse einer mehrjährigen Untersuchung an den Hirnen verschiedener Hunderacen, insbesondere die Feststellung des „absoluten und relativen Gehirngewichts“ bei denselben.

Bei der Bestimmung des Körpergewichtes der Hunde hat sich ergeben, dass dasselbe bei einer und derselben Race und bei gleichem Alter der Thiere eine grosse Schwankung haben kann, welche wesentlich abhängig ist von der grösseren oder geringeren Fettablagerung und dem Grade der Muskelausbildung bei den verschiedenen Thieren.

Man erhält daher bei den Gewichtsbestimmungen des Körpers und des Hirns an mehreren Hunden zuweilen Zahlen, welche bei der Berechnung des relativen Hirngewichtes keinen korrekten Ausdruck geben. Zwei gleichschwere Hirne zweier Hunde, welche gleichgross und gleichaltrig sind, aber in Folge einer bedeutenden Fettablagerung bei dem einen und hochgradiger Magerkeit bei dem andern Thier ganz ungleiche Körpergewichte zeigen, ergeben bei der Berechung des relativen Gewichtes auffallende Unterschiede. Diese Differenzen mögen ausgleichbar werden, wenn eine grössere Untersuchungsreihe, als dies zur Zeit der Fall ist, vorliegt, und dann nur

Normalthiere mit Fettgehalt und Muskelentwicklung mittleren Grades miteinander verglichen werden.

So habe ich die Gewichtsangaben von zwei Thieren in einer zuerst angelegten Tabelle wieder gestrichen, weil dieselben von allen übrigen Gewichtsbestimmungen verschieden grosser Hunde eine so hochgradige Abweichung zeigten, dass ich einen Irrthum bei der Notirung des Körpergewichtes vermuthete. Allein weitere Beobachtungen liessen erkennen, dass das allzugeringe Körpergewicht in den beiden Fällen die Folge einer Infectionskrankheit, an denen die Hunde zu Grunde gingen, war. Bei allen weiteren derartigen Untersuchungen der Thiere ist stets eine hochgradige krankhafte Veränderung des Körpers mit in Betracht zu ziehen, wenn dieselben verwerthbare Resultate ergeben sollen.

Um eine Uebersicht über diese Gewichtsergebnisse zu gewinnen, soll hier zunächst die Tabelle zur Mittheilung gelangen, in der von 24 Hunden das Alter, das absolute Körper- und Gehirngewicht und das berechnete relative Gehirngewicht enthalten sind. (Siehe nebenstehende Tabelle.)

Was das Alter der Hunde anlangt, so darf nicht übersehen werden, dass Angaben über dasselbe vorkommen, die an Genauigkeit zu wünschen übrig lassen; denn die Thiere werden nicht immer von jenen Besitzern gekauft, die sie aufgezogen haben, wesshalb ihre Wurfzeit unbekannt ist. Verwerthet man für die Bestimmung des Alters bei einem Hunde die Beschaffenheit des Gebisses, so kann man auch nur erfahren, ob ein Thier mit einem Milchgebiss, einem im Wechsel begriffenen oder mit einem bleibenden Gebiss versehen ist. Aus der Beschaffenheit des Gebisses lässt sich daher nur Jugend und höheres Alter eines Thieres, aber nicht das Alter nach Monaten oder Jahren angeben. Die Altersbestimmung der Hunde hat, soweit ich bis jetzt ersehen kann, eine wesentliche Bedeutung desshalb, weil mit Hilfe derselben die

Tabelle.

	Race und Geschlecht	Alter	Absolutes Körpergewicht	Absolutes Gehirngewicht	Relatives Gehirngewicht	Auf 1000 g treffen an Gehirn
1	Leonberger	4 Jahre 6 Mon.	59 000 g	135 g	1 : 437,03	2,28 g
2	Bernhardiner ♀	3 Jahre	57 000 g	108 g	1 : 527,77	1,89 g
3	Bernhardiner ♂	8—9 Jahre	53 000 g	123 g	1 : 430.89	2,32 g
4	Ulmer Dogge	2 Jahre 3 Mon.	48 000 g	114 g	1 : 421,05	2,37 g
5	Bernhardiner ♂	4 Jahre 7 Mon.	46 000 g	123 g	1 : 373,98	2,67 g
6	Leonberger	1 Jahr 4 Mon.	41 000 g	105 g	1 : 390,47	2,56 g
7	Jagdhund ♀	2 Jahre	32 000 g	109 g	1 : 293,57	3,41 g
8	Hofhund	2 Jahre	29 000 g	62 g	1 : 467,74	2,13 g
9	Bernhardiner ♀	5 Monate	28 000 g	116 g	1 : 241,37	4,14 g
10	Jagdhund ♀	3 Jahre	12 000 g	82 g	1 : 146,34	6,83 g
11	Affenpinscher	1 Jahr 6 Mon.	8 500 g	73 g	1 : 116,43	8,58 g
12	Pinscher ♀	9 Monate	7 500 g	64 g	1 : 117,18	8,53 g
13	Spitz ♀	6 Monate	6 100 g	75 g	1 : 81,33	12,29 g
14	Windhund ♀	2 Jahre	6 000 g	81 g	1 : 74,07	13,50 g
15	Mops (zweifelhafte Race)	4 Monate	4 878 g	72 g	1 : 67,75	14,76 g
16	Mops (zweifelhafte Race)	4 Monate	4 775 g	74 g	1 : 64,52	15,49 g
17	Pinscher	1 Jahr 6 Mon.	4 496 g	71 g	1 : 63,32	15,71 g
18	Hund von engl. Race	—	4 378 g	68 g	1 : 64,38	15,53 g
19	Spitz	6 Monate	3 750 g	59 g	1 : 63,55	15,73 g
20	Spitz	6 Monate	3 400 g	71 g	1 : 47,88	20,88 g
21	Spitz	—	3 128 g	70 g	1 : 44,68	22,37 g
22	Hund ♀	4 Monate	1 137 g	84 g	1 : 13,53	73,87 g
23	Windhund	Erhalten aus wissenschaftlichen Instituten ohne Angabe des Alters und Körpergewichtes.		95 g	—	—
24	Fox-terrier			32 g	—	—

maximale Wachsthumsgrenze des Hirns, d. h. die Grenze der Gewichtszunahme festgestellt werden soll. Vergleicht man z. B. die Hirngewichte der beiden Bernhardiner (Nr. 2 und 9) miteinander, so ergiebt sich, dass das fünf Monat alte Thier (Nr. 9) ein Hirngewicht von 116 g besitzt, während der dreijährige Hund (Nr. 2) der gleichen Race, welcher 29000 g schwerer ist als der erstere, nur ein Hirngewicht von 108 g hatte.

Aus den bisherigen Gewichtsbestimmungen der Körper und der Hirne bei den Hunden darf gefolgert werden, dass deren Hirne schon früh ihre äusserlich formelle Ausbildung, ihr maximales Wachsthum erlangen, die Körper aber noch weiter an Grösse und Gewicht zunehmen, ohne wesentliche Antheilnahme der Hirne.

Die Zahlenreihe über das absolute Gehirngewicht ergiebt, dass dasselbe nicht durch das Alter des Thieres, sondern durch das Körpergewicht bis zu einem gewissen Grade beeinflusst wird. Sind auch im Allgemeinen zwischen Hirn und Körpergewicht der Hunde mehrfache Schwankungen vorhanden, so lässt sich aus den Zahlen doch ersehen, dass die schwersten Hunde auch die schwersten Hirne und die leichten Hunde die kleinsten Hirne besitzen. Die Thiere wurden nach der Grösse ihres Körpergewichtes in die Tabelle eingetragen, während die Gehirngewichte in der Reihenfolge der Körpergewichte geordnet, einige Schwankungen zeigen. Verweise ich auf Nr. 9—14, so folgen hier Gehirngewichte von 109 g bei 32000 g Körpergewicht, 62 g Gewicht des Hirns bei 29000 g Körpergewicht und hier sind die Zahlen der Ausdruck von ganz ungleichen Verhältnissen zwischen Körper- und Hirngewicht. Bei diesen auffallenden Unterschieden darf man wohl daran denken, dass das Alter, die Race und insbesondere der körperliche Zustand der Thiere einen nicht geringen Einfluss ausüben. Unverständlich bleibt es immerhin, wenn ein zweijähriger Hund bei einem Gewicht

von 32000 g nur 109 g Gehirn, ein gleichalteriges Thier bei einem Körpergewicht von 29000 g nur 62 g und sogar ein fünf Monat alter Bernhardiner, der 28000 g schwer war, 116 g Gehirn hatte.

Der Raceunterschied, an den man auch denken könnte, erscheint nicht ausreichend, diese Verschiedenheit zu erklären, ebensowenig wie der Unterschied verständlich ist bei Nr. 21 und 22, bei denen der 1137 g schwere Hund um 14 g mehr Gehirnsubstanz besass, als das 3128 g schwere Thier.

Hier spielen noch Faktoren herein, welche bei den weiteren Studien eine ganz besondere Beachtung verdienen. Einerseits scheint das Alter der Thiere, andererseits aber die Krankheit, welche den Tod desselben verursachte, mit in Betracht zu kommen. Schon seit Jahren suche ich die Hirne von jenen Hunden zu sammeln, welche für physiologische Zwecke in den Instituten angekauft werden; dieselben verdienen ebenso den Vorzug vor kranken Thieren, wie wir die Bestimmungen des Körper- und Gehirngewichtes an den Verunglückten, den Selbstmördern und Enthaupteten jenen an chronischen Krankheiten verstorbenen Menschen vorziehen.

Schon aus der Zahlenvergleichung des absoluten Körper- und Gehirngewichtes lässt sich entnehmen, dass die relativen Gewichte auffallend differiren werden. Wie schon erwähnt sprechen mehrere Thatsachen dafür, dass das Wachsthum des Hirns bei den Hunden schon vor Ende ihres ersten Lebensjahres seine Grenze erreicht, während der Körper noch bedeutend an Grösse und Gewicht zunimmt. Das relative Gehirngewicht zeigt demnach beim jungen und alten Thier einen in die Augen fallenden Unterschied:

Die Zahlenreihe über das relative Hirngewicht zeigt sich um so günstiger, je jünger das Thier ist. Bei dem drei Jahre alten Bernhardiner (Nr. 2) welcher ein Körpergewicht von 57000 g besitzt, ergiebt sich ein relatives Gehirngewicht wie 1:527,77; dagegen wurde bei dem fünf Monat alten

Bernhardiner (Nr. 9), der 28000 g wog, ein relatives Hirngewicht wie 1:241,37 berechnet, und bei dem vier Monat alten Thier (Nr. 15), das nur 4878 g wog, ein relatives Hirngewicht wie 1:67,75 festgestellt. Bei allen leichten Hunden ergiebt sich ein relativ sehr günstiges Hirngewicht, weil das Körperwachsthum, nachdem das Hirn seine maximale Grösse erlangt hat, gar nicht mehr oder nur in geringem Grade fortschreitet.

In ganz ähnlicher Weise zeigt sich das relative Hirngewicht, wenn dasselbe auf 1000 g Körpergewicht berechnet wird. Bei den schweren Thieren kommen auf 1000 g Körper zwischen 2—6 g Hirn und bei den kleinen leichten Hunden auf 1000 g Körper 8—22 g und mehr Hirn.

Bei den weiteren Studien werden noch in Betracht gezogen, das Volum des ganzen Schädels zu Volum der Schädelhöhle und das Verhältniss des Hirnschädels zum Gesichtsskelett.

Die äusserlich am Hundeschädel gewonnenen Messungsergebnisse können, wenn es sich um relative Beziehungen zwischen den äusseren Dimensionen des Schädels und des Hirns handelt, keine direkte Verwerthung finden, wie etwa bei dem Menschenschädel, weil bei den Hunden die ungleiche Dicke der Schädelknochen, die Muskelleisten und die pneumatischen Räume am Hirnschädel die Messung hochgradig beeinflussen. Aber noch mehr wird der Kopf des Hundes beeinflusst durch den ungemein verschiedenen Grad der Ausbildung des Gesichtsskelettes. Die Fresswerkzeuge sind bei der einen Race sehr stark, bei der andern nur schwach ausgebildet, so dass der Gesichts- und der sog. Sattelwinkel höchst variabel erscheinen, ohne dass der Grad der Hirnentwicklung einen nennenswerthen Einfluss auf dieselben ausübt.

Alle die berührten Fragen bedürfen für ihre Beantwortung noch eingehendere Studien und nach Gewinnung

des Hirn- und Schädelmateriales von den Hunden verschiedener Racen soll mit Berücksichtigung der spärlich vorhandenen Literatur das vorliegende Thema eine eingehendere Besprechung erfahren.

Vorläufig sollen einige Sätze über die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen hier zur Mittheilung gelangen.

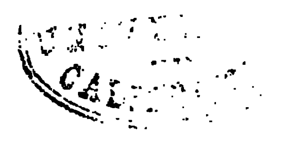
1. Wenn auch in den Zahlen über das Körper- und Hirngewicht noch viele Schwankungen, welche durch eine grössere Untersuchungsreihe sich ausgleichen mögen, vorhanden sind, so ist doch schon festgestellt, dass das Hirn bei den Hunden schon im ersten Lebensjahre seine Wachsthumsgrenze erreicht.

2. Der schwerste Hund hat auch das schwerste Hirn. Die Hirngewichte nehmen bei den Hunden mit dem Körpergewicht derselben zu, jedoch in einem ungleichen Verhältniss.

3. Das relative Hirngewicht ist bei kleinen leichten Thieren ein viel günstigeres als bei den grossen.

4. Der kleine leichte Hund besitzt auf 1000 g Körpergewicht bedeutend mehr Hirn als der grosse.





Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 2. Juni 1894.

1. Herr H. Seeliger legt eine Abhandlung: „über den vierfachen Stern ζ Cancri“ vor.

2. Herr L. Boltzmann überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. Ignaz Schütz, Hilfsarbeiter beim Unterrichte für theoretische Physik im math.-physikal. Institut: „über eine Verallgemeinerung der v. Helmholtz'schen Wirbel-Integrale, welcher eine unendliche Mannigfaltigkeit von mechanischen Bildern der Maxwell'schen Theorie entspricht“.

Ueber den vierfachen Stern ζ Cancri.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 2. Juni.)

Die Resultate numerischer Rechnungen von der Art, wie ich sie in meinen beiden Arbeiten über ζ Cancri[1]) veröffentlicht habe, tragen immer mehr oder weniger den Character von Interpolationsformeln. Ihre Constanten lassen sich nicht mit so grosser Genauigkeit bestimmen, dass auf

---

1) Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri. Denkschriften der Wiener Akademie 1881. Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri. Abhandlungen der k. bayer. Akademie 1888. Im Folgenden soll die erste Abhandlung mit I, die zweite mit II bezeichnet werden.

Jahre hinaus ein völlig befriedigender Anschluss an die Beobachtungen verbürgt werden kann. Ich habe diese Sachlage, namentlich in II, ausdrücklich hervorgehoben. Es ist deshalb einerseits nicht zu verwundern, wenn die aus der Theorie folgenden Oerter mit der Zeit von den Beobachtungen um geringe Beträge abweichen, andererseits hat es kein Interesse in kürzeren Zeitintervallen immer von neuem die Beobachtungen an die Theorie genau anzuschliessen, wenn nur die characteristischen Ergebnisse der letzteren sich in den ersteren wiederfinden.

Bei der Ausarbeitung von I standen mir Beobachtungen bis zum Jahre 1880 zur Verfügung, während in II Messungen bis zum Jahre 1888, allerdings zum Theil in nicht hinlänglicher Zahl, benutzt werden konnten. Die Berechtigung der zweiten Untersuchung lag deshalb nicht sowohl in dem vermehrten Beobachtungsmaterial, als vielmehr in dem Umstande, dass ich dort die Theorie nach verschiedenen Richtungen eingehender und vollständiger entwickeln konnte und in dieser Beziehung einen gewissen Abschluss erreichen zu können glaubte. Eine Aufforderung meine Rechnungen über ζ Cancri gegenwärtig wieder aufzunehmen, kann ich deshalb in dem Hinzukommen neuer Beobachtungen nicht erblicken. Dagegen sind in den letzten Jahren von Herrn Burnham, einem verdienten Doppelsternbeobachter, Angriffe gegen meine Theorie der Bewegung des entfernteren Sternes C erfolgt, welche in den Augen derjenigen, die meine Arbeiten nicht genauer kennen, die Sachlage zu verdunkeln geeignet sind. Die von Herrn Burnham mit grosser Zuversicht vorgebrachten Argumente sind freilich nur geeignet zu beweisen, dass ihr Urheber weder genügende Sachkenntniss besitzt, noch sich die Mühe gegeben hat meine Arbeiten genauer anzusehen. Ich könnte deshalb die verdiente Würdigung der Burnham'schen Behauptungen ruhig der Zukunft und Anderen überlassen. Auf der andern Seite kann ich nicht

zugeben, dass durch ganz unbegründete Behauptungen die Resultate meiner Arbeiten über ζ Cancri in Frage gestellt werden und deshalb habe ich im Folgenden einige Rechnungen ausgeführt, die auch für den Fernerstehenden die Sachlage in, wie ich hoffe, völlige Klarheit zu stellen geeignet sein dürften.

Ich werde mich im Folgenden einzig und allein mit der Bewegung des entfernteren Begleiters C um den Schwerpunkt der beiden inneren Sterne A und B beschäftigen. Ausführliche Untersuchungen in I und II haben zu dem Resultate geführt, dass die Beobachtungen keine merkliche Verschiedenheit zwischen dem Schwerpunkte von A und B und der Mitte beider Sterne, $\frac{A+B}{2}$, ergeben. Weiter zeigten sich in den Beobachtungen von C und zwar in ganz übereinstimmender Weise sowohl im Positionswinkel als auch in Distanz Undulationen, welche die Positionswinkel um ungefähr $\pm 2^0$ und die Distanzen um $\pm 0''2$ um einen mittleren Werth herumschwanken liessen. Die constante Periode dieser Schwankung betrug nahezu 18 Jahre und es war möglich, dieselbe in mehr als 3 vollständigen Wiederholungen zu bestätigen. Die ganze Erscheinung ist nach jeder Richtung vollständig durch die Annahme zu erklären, der Stern C besitze einen vorerst als dunkel zu betrachtenden nahen Begleiter. Die in II verarbeiteten Jahresmittel von 1880 ab konnten indessen nicht hinlänglich begründet werden, was nunmehr durch die inzwischen erfolgte Publication mehrerer werthvollen Beobachtungsreihen möglich ist. Vom Jahre 1888 ab wäre aber auch gegenwärtig die Aufstellung von einigermaassen zuverlässigen Jahresmitteln nicht möglich, hätten nicht die Herren Schiaparelli, H. Struve und Lovett die grosse Freundlichkeit gehabt, mir aus ihren Tagebüchern die gewünschten Auszüge mitzutheilen. Namentlich die sehr zahlreichen und ausgezeichneten Messungen

Herrn Schiaparelli's bilden eine wesentliche Stütze der folgenden Bemerkungen. Auf diese Weise war es möglich 15 neue und sichere Jahresmittel von 1880—1894 aufzustellen. Nach den obigen Bemerkungen kann es sich nicht darum handeln, diese neuen Messungsresultate in die früheren Rechnungen einzufügen. Dagegen glaube ich ähnlichen unbegründeten Angriffen, wie die von Seite des Herrn Burnham, am besten zu begegnen, wenn ich die neueren Messungen, die doch fast gar keinen personalen Zusammenhang haben mit den in den vierziger oder fünfziger Jahren ausgeführten, für sich allein behandle. Nachdem sich herausgestellt haben wird, dass sich meine früheren Formeln den neuen Beobachtungen noch soweit anschliessen, als man überhaupt erwarten konnte, werde ich zeigen, dass auch die neuen Messungen, für sich allein betrachtet, wiederum der Annahme eines dunklen Begleiters von *C* völlig und zwar auch quantitativ den früheren Formeln entsprechend, genügen und dass ohne eine solche Annahme Fehler übrig bleiben, die durch Anhäufung von persönlichen Fehlern zu erklären wohl Niemand in ernsthafter Weise versuchen wird.

Ich gehe nun zur Mittheilung der gesammelten Jahresmittel der Beobachtungen von *C*, bezogen auf die Mitte von *A* und *B*, über. Zur Abkürzung werden die Beobachter Hall (sen.), Jedrzejewicz, Schiaparelli und Hermann Struve mit den Buchstaben H, J, Sp, H. Σ, bezeichnet.

1800 +	Beobachter	Gewicht	p	ϱ	Mittel
80.16	Franz	2	130°.60	5".545	
80.21	H.	4	132.45	5.465	1880.21 (11.10) 132°.25 5".372
80.22	J.	4	132.50	5.193	
80.31	Seabroke	1	133.72	—	

1800 +	Beobachter	Gewicht	p	ϱ	Mittel			
81.24	J.	4	131°.29	5".467	1881.28	(17.16)	131°.42	5".431
81.25	Doberck	2	131.75	5.409				
81.26	Seabr.	1	131.37	—				
81.28	O. Σ.	2	130.80	5.210				
81.30	Sp.	4	131.57	5.445				
81.30	H.	4	131.54	5.508				
82.20	H.	4	132.03	5.587	1882.24	(14.13)	131°.13	5".517
82.25	Seabr.	2	129.83	—				
82.26	Sp.	4	131.06	5.468				
82.27	J.	4	130.94	5.497				
83.13	Engelm.	4	129.43	5.653	1883.26	(15.14)	129°.73	5".599
83.29	Sp.	4	130.16	5.598				
83.31	H.	4	130.21	5.567				
83.32	Seabr.	1	128.33	—				
83.35	Küstner	2	129.20	5.557				
84.21	Perrotin	2	128.95	5.561	1884.28	(17.14)	128°.63	5".546
84.25	Sp.	4	129.21	5.589				
84.26	O. Σ.	4	129.22	5.418				
84.28	H.	4	126.59	5.625				
84.38	Seabr.	1	131.00	—				
84.39	Smith	2	126.90	—				
85.28	Seabr.	1	126.20	5.760	1885.29	(9)	128°.09	5".643
85.29	Engelm.	4	128.16	5.654				
85.29	Sp.	4	128.48	5.603				
86.04	Tarrent	2	125.71	5.480	1886.26	(20.14)	126°.99	5".591
86.24	Seabr.	1	126.40	(5.06)				
86.25	Smith	1	127.30	(4.61)				
86.28	H.	4	126.26	5.600				
86.29	J.	4	126.98	—				
86.30	Engelm.	4	128.58	5.569				
86.30	H. Σ.	4	126.84	5.660				

1800 +	Beobachter	Gewicht	p	ϱ	Mittel
87.24	Sp.	4	125°.18	5".598	
87.24	H.	4	126.96	5.595	
87.30	H. Σ.	4	126.17	5.600	1887.27 (14.12) 125°.96 5".598
87.35	Seabr.	1	125.40	(4.51)	
87.36	Smith	1	124.80	(4.64)	
88.25	H.	4	124.13	5.520	
88.27	Sp.	4	124.31	5.684	
88.28	Smith	2	125.20	(4.65)	
88.33	O. Σ.	2	123.84	5.667	1888.29 (17.15) 124°.27 5".625
88.33	H. Σ.	4	124.01	5.610	
88.36	Maw	1	124.70	5.790	
89.12	Seabr.	1	125.30	(4.85)	
89.18	Highton	1	124.60	5.310	
89.19	Leavenworth	2	123.80	5.530	
89.22	Sp.	4	123.01	5.536	1889.22 (18.17) 123°.79 5".534
89.23	H. Σ.	4	123.51	5.590	
89.23	H.	4	123.91	5.680	
89.29	Maw	2	124.50	5.240	
90.23	Sp.	4	123.43	5.514	
90.24	Comstock	1	124.80	5.470	1890.28 (13) 123°.51 5".507
90.28	H.	4	123.51	5.432	
90.33	H. Σ.	4	123.26	5.580	
91.21	Sp.	4	122.43	5.527	
91.22	H.	4	122.87	5.479	
91.26	Maw	2	122.50	5.300	1891.26 (13) 122°.76 5".490
91.27	H. Σ.	2	122.31	5.570	
91.65	Byers & Collins	1	125.10	5.610	
92.26	Sp.	4	122.40	5.443	1892.26 (4) 122°.40 5".443
93.16	Jones	1	(115.70)	5.320	
93.21	Lewis	2	123.70	5.185	1893.24 (6.7) 122°.54 5".288
93.25	Sp.	4	121.96	5.331	
94.16	H. Σ.	4	122.39	5.430	
94.16	Lovett	2	123.10	5.540	1894.19 (10) 122°.46 5".405
94.24	Sp.	4	122.22	5.313	

Zu dieser Zusammenstellung ist Folgendes zu bemerken:

1. Die Gewichtsbestimmung geschah wieder nach dem in II. aufgestellten Schema. Das genügt jedenfalls für die vorliegenden Zwecke, wenngleich hierdurch die neuen mit so ausgezeichneten Hülfsmitteln ausgerüsteten Beobachter sicherlich zu kleine Gewichte bekommen haben. Bei einer definitiven Bearbeitung wird man u. A. den aus sehr zahlreichen und augenscheinlich sehr genauen Abendmitteln zusammengesetzten Jahresmitteln Schiaparelli's ein grösseres Gewicht zu geben haben. Die Jahresmittel Schiaparelli's sind der Reihe nach aus 13, 12, 14, 8, 10, 10, 14, 14 Abenden gebildet.

2. Die Reduction der auf A oder B bezogenen Messungen von C auf $\frac{A+B}{2}$ ist mit Hülfe von Annahmen über die gegenseitige Stellung von A und B erfolgt, die nicht ganz sicher sind und nicht ohne grössere Rechnungen sicher hergestellt werden konnten. Diese Ungenauigkeit, die übrigens kaum merklich sein wird, kann nur bei den Beobachtungen von H. Σ. die letzte Stelle der obigen Zahlen beeinflusst haben.

3. Was die constanten persönlichen Fehler betrifft, so wurden durch Vergleichung mit der II. S. 71 gegebenen Ephemeride folgende Correctionen angebracht:

Sp.	— 0°85	+ 0"071
H.	+ 0.51	— 0.025
H. Σ.	— 0.41	+ 0.097

Die letzte Beobachtung von H. Σ. scheint indessen sich dieser Correction zu widersetzen. Dieselbe ist durch eine dreijährige Pause von den früheren getrennt und besteht aus je 6 Vergleichungen von C mit A und mit B, welche vollständig übereinstimmende Mittelwerthe geben. Danach scheint es besser zu sein, diese letzte Messung von H. Σ. uncorrigirt zu lassen. Im Uebrigen tritt auf den ersten Blick ziemlich deutlich die Thatsache hervor, dass hierdurch das letzte Jahresmittel in Distanz unsicher ist, und man wird das auch in der Folge bestätigt finden.

4. Die Messungen von O. Σ. aus dem Jahre 1881 und die mit dem 30zölligen Refractor angestellten sind direct ohne Correction dem Anhange von II. entnommen worden. Die Gründe für dieses Verfahren lasse ich unerörtert, weil ein merklicher Einfluss hierdurch im Folgenden nicht hervorgerufen werden kann. Alle anderen Beobachtungen sind, wie früher, uncorrigirt geblieben.

Was die in II. und im Anschluss hieran in der vorliegenden Notiz angewandten constanten persönlichen Fehler betrifft, so geben sie nichts anderes an, als die Mittel der Abweichungen gegen die Ephemeride, welche wiederum aus provisorisch corrigirten Beobachtungen abgeleitet ist. Die Beobachtungen erscheinen hierdurch auf ein mehr oder weniger willkürliches System der Positionswinkel und Distanzen bezogen. Mit einiger Wahrscheinlichkeit wird man aber die gefundenen Correctionen als wirkliche constante persönliche Fehler betrachten dürfen, wenn das Mittel aller angebrachten Correctionen nicht merklich von Null abweicht, im anderen Falle ist das angenommene System noch nicht das normale. Die in II. und gegenwärtig benutzten Correctionen sind nun, wenn dort, wo für denselben Beobachter verschiedene Correctionen gefunden worden sind, einfache Mittelwerthe angesetzt werden (mit Ausnahme von Sp., bei welchem wegen der grossen Verschiedenheit der Instrumente dies kaum zulässig sein dürfte):

W. Σ.	+ 1°.82	— 0″.070
O. Σ.	— 0.47	— 0.125
D.	+ 0.84	— 0.033
S.	+ 0.02	— 0.003
Δ.	— 0.26	— 0.031
Mädler	+ 0.30	—
Du.	— 1.56	— 0.050
Sp. I	+ 1.04	+ 0.004
Engelmann	+ 1.38	+ 0.217
J.	+ 0.71	— 0.103

Kaiser	$+1\overset{\circ}{.}79$	$-0\overset{''}{.}280$
Sp. II	-0.85	$+0.074$
H.	$+0.51$	-0.025
H. Σ.	-0.41	$+0.097$
Mittel	$+0\overset{\circ}{.}35$	$-0\overset{''}{.}024$

Nimmt man nur die am sichersten bestimmten Correctionen, nämlich: W. Σ., Δ., Sp. I, Sp. II, H., H. Σ., so ergiebt sich als Mittelwerth $+ 0\overset{\circ}{.}31$, $+ 0\overset{''}{.}008$. Danach dürfte das System etwas zu grosse Positionswinkel angeben, während die Distanzen jedenfalls nahezu der Wahrheit entsprechen. Da aber eine constante Correction im Positionswinkel auf die Theorie keinen Einfluss übt, wird man das gewählte System als nahezu normal ansehen dürfen. Ausserdem ist diese positive Correction durch die etwas ungewöhnlich grosse Correction von W. Σ. zum grössten Theile entstanden. Jedenfalls liegt vorderhand kein Grund vor, zu bezweifeln, dass sich meine Untersuchungen in II. auf Beobachtungen stützen, die auf ein wesentlich richtiges System bezogen worden sind, wenngleich nicht ausgeschlossen ist, dass sich in der Folgezeit, wo hoffentlich recht viele der jetzt zur Verfügung stehenden grossen Fernrohre zur Ausmessung von ζ Cancri benutzt werden, eine Modification nach der einen oder anderen Seite ergeben könnte.

Die oben angeführten Jahresmittel wurden zunächst, zur Erleichterung aller Vergleichungen, auf dasselbe Zehntel des betreffenden Jahres reducirt. Es muss aber wiederholt darauf aufmerksam gemacht werden, dass die letzten Stellen, also die Hundertstel der Positionswinkelgrade und die Tausendstel der Distanzsecunden, um einige wenige Einheiten unsicher wird; das liegt in der Art ihrer Berechnung. Ebenso haben alle weiteren Rechnungen eine solche minimale, gänzlich belanglose Unsicherheit. Den 15 neu abgeleiteten Jahresmitteln habe ich nun noch die 4 zunächst vorangehenden aus II. hinzugefügt. Eine Aenderung oder Vervollständigung mit ihnen vorzunehmen, war ich nicht in der Lage.

Zuerst sollen die beobachteten Positionswinkel und Distanzen p_B und ϱ_B mit den aus der Theorie (II S. 68—71) folgenden Werthen p_R und ϱ_R verglichen werden. Die Differenzen im Sinne Beobachtung—Rechnung finden sich unter der Rubrik $B-R$ in der Zusammenstellung auf folgender Seite. Ein nur flüchtiger Blick auf diese Zahlen ergiebt nun, dass im Grossen und Ganzen der Anschluss an die Theorie zufriedenstellend ist. Zum mindesten sind die eigenthümlichen Undulationen, welche die Beobachtungen in p und ϱ ergeben, fast vollständig verschwunden. Uebrig geblieben sind Differenzen von allerdings wohl noch systematischem Betrage, die aber für den objectiven Beurtheiler absolut nichts Auffallendes mehr haben, da sowohl systematische Fehler in den Beobachtungen vorauszusetzen sind und ferner es sich ja um eine Extrapolation auf etwa 10 Jahre hinaus handelt. In Anbetracht dessen darf die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung als befriedigend bezeichnet werden. Die Summen der absoluten Differenzen betragen im Positionswinkel 8.56, in Distanz 0.769.

Die Undulationen, welche die beobachteten p und ϱ zeigen und die, wie ich in II. gezeigt habe, mit einer fast mathematischen Regelmässigkeit an eine Periode von ungefähr 18 Jahren geknüpft sind, treten deutlicher hervor, wenn man die Beobachtungen etwa durch eine Kreisbewegung darzustellen sucht. Hierbei ist wohl zu beachten, dass es sich um eine fortschreitende Veränderung der Positionswinkel um nur 9 Grad handelt. Nimmt man diese fortschreitende Veränderung von p nach II an und setzt:

$$p_0 = 145^\circ\!.46 - 0^\circ\!.513 \ (t - 1850.2), \quad \varrho_0 = 5''\!.459$$

entsprechend dem einfachen ohne Rücksicht auf die Gewichte gebildeten Mittelwerth aller ϱ_B, so geben die Differenzen $p_0 - p_B$, $\varrho_0 - \varrho_B$ nahezu das, was man als die übrig bleibenden Fehler der Beobachtungen anzusehen hätte, wenn man die Annahme, dass der Stern C nicht wiederum doppelt sei, fallen

liesse. Differenzen von einem solchen Betrage sind nunmehr in der vierten Wiederholung aufgetreten. Es widerstrebt mir, angesichts dieser Zahlen die Behauptung des Herrn Burnham, dass solche Abweichungen als eine merkwürdige, nunmehr zum 4. Male in gleicher Weise auftretende Anhäufung von persönlichen Fehlern aufzufassen seien, zu kritisiren. Dergleichen Behauptungen mit einem parlamentarischen Ausdrucke zu charakterisiren ist kaum möglich.

	p_B	ϱ_B	p_R	ϱ_R	$B-R$		p_0	p_0-p_B	$\varrho_0-\varrho_B$
1876.2	130°.51	5".317	130°.91	5".281	−0°.40	+0".036	132°.12	+1°.61	+0".142
77.2	131.15	258	131.21	255	−0.06	+0.003	131.60	+0.45	+0.201
78.2	131.42	295	131.57	259	−0.15	+0.036	131.09	−0.33	+0.164
79.2	132.62	258	131.86	294	+0.76	−0.036	130.58	−2.04	+0.201
80.2	132.25	372	131.95	351	+0.30	+0.021	130.06	−2.19	+0.087
81.2	131.46	425	131.76	422	−0.30	+0.003	129.55	−1.91	+0.034
82.2	131.16	514	131.28	494	−0.12	+0.020	129.03	−2.13	−0.055
83.2	129.79	597	130.54	561	−0.75	+0.036	128.52	−1.27	−0.138
84.2	128.72	543	129.59	615	−0.87	−0.072	128.00	−0.72	−0.084
85.2	128.19	642	128.49	651	−0.30	−0.009	127.49	−0.70	−0.183
86.2	127.06	591	127.32	667	−0.26	−0.076	126.99	−0.07	−0.132
87.2	126.04	598	126.12	665	−0.08	−0.067	126.48	+0.44	−0.139
88.2	124.38	627	124.93	642	−0.55	−0.015	125.96	+1.58	−0.168
89.2	123.81	535	123.84	601	−0.03	−0.066	125.45	+1.64	−0.076
90.2	123.58	511	122.91	554	+0.67	−0.043	124.93	+1.35	−0.052
91.2	122.80	494	122.20	475	+0.60	+0.019	124.42	+1.62	−0.035
92.2	122.43	447	121.75	403	+0.68	+0.044	123.90	+1.47	+0.012
93.2	122.54	290	121.60	335	+0.94	−0.045	123.39	+0.85	+0.169
94.2	122.46	404	121.72	282	+0.74	+0.122	122.89	+0.43	+0.045

Um indessen die entscheidende Thatsache deutlich vorzuführen, dass die angeführten letzten 19 Jahresmittel, bei denen so viele und ausgezeichnete Beobachter (es sei hierbei hingewiesen auf die überaus gute Uebereinstimmung, namentlich in den Positionswinkeln) mitgewirkt haben, die in den Jahresmitteln vor 1876 nicht vorkommen, mit derselben Periode übereinstimmen, die in II aus der Gesammtheit der früher verfügbaren Messungen abgeleitet worden ist, habe ich die Differenzen $p_0 - p_B$ nach der Methode des kl. Qu. durch eine, einer Kreisbewegung mit der genannten Periode entsprechenden Formel darzustellen unternommen. Es ergab sich so:

$$\text{(II)} \qquad p_0 - p_B = -0\overset{\circ}{.}06 + 1\overset{\circ}{.}918 \sin 19\overset{\circ}{.}947\, t + 0\overset{\circ}{.}137 \cos 19\overset{\circ}{.}947\, t$$

worin die Zeit t in Jahren von 1850.2 anzusetzen ist. Wollte man noch einen besseren Anschluss dadurch erreichen, dass man die Veränderung von p_0 etwas ändert, so wäre zu setzen

$$\text{(III)} \qquad p_0 - p_B = -0\overset{\circ}{.}06 - 0\overset{\circ}{.}681 \left(\frac{t}{10}\right) + 2\overset{\circ}{.}268 \sin 19\overset{\circ}{.}947\, t + 0\overset{\circ}{.}286 \cos 19\overset{\circ}{.}947\, t$$

In der folgenden Tabelle sind die nach den Formeln gerechneten Werthe der Positionswinkel unter II bezw. III angegeben, ferner sind nunmehr die übrig bleibenden Fehler unter Δ bezw. Δ_1 angeführt. Die gewonnene Darstellung ist, wie ja gar nicht anders zu erwarten war, eine zufriedenstellende. Der systematische Charakter der Differenzen kann zum Theil gewiss durch eine mehr ausgearbeitete Theorie, ähnlich etwa der von mir früher dargestellten und einer mit Rücksicht auf die Gewichte durchgeführten Rechnung fortgeschafft werden, zum grösseren Theil sprechen sich hier eben wirklich jene rein persönlichen Beobachtungsfehler aus. Ich habe auf diesen Punkt in meinen früheren Arbeiten stets nachdrücklich hingewiesen. Für die Summen der absoluten

not possibly affect the measures of *C.* The truth of this statement must be so obvious to every practical astronomer who is accustomed to use the micrometer that it can hardly be considered a debateable question.“ Ich kann nur mein lebhaftes Bedauern darüber aussprechen, dass ein praktischer Astronom eine so auffallende Unkenntniss der Umstände besitzt, welche systematische Abweichungen nothwendiger Weise erzeugen müssen, und noch mehr muss ich es bedauern, dass er diese Unkenntniss in so überaus anspruchsvoller Form zur Schau trägt. Schon hieraus folgt, dass ein wissenschaftlicher Gewinn aus einer Auseinandersetzung mit Herrn Burnham über die vorliegenden Fragen nicht hervorgehen kann. Ich werde deshalb auch etwaige weitere Bemerkungen dieses Herrn über ζ Cancri und meine Arbeiten, als für die Sache gleichgültig, in Zukunft unberücksichtigt und erneute Angriffe unbeantwortet lassen.

---

stätigung der Theorie. Wenn man die geringen Abweichungen ($\Sigma \varDelta_2 = 0''.720$ bezw. $0''.600$) überblickt, so wird man nicht zweifelhaft sein können, dass alle grösseren regelmässigen Undulationen in den Distanzen vollkommen verschwunden sind. Ich habe in dieser Controlle in meinen beiden früheren Abhandlungen stets eine sehr gewichtige Stütze erblickt für die fast apodiktische Sicherheit der Annahme, dass *C* einen dunklen Begleiter haben müsse. Ich kann auch jetzt nur wiederholen, was ich über jene Annahme in II (S. 14) gesagt habe: „Ich für meinen Theil stehe nicht an, derselben eine Sicherheit zuzusprechen, die so gross ist, wie sie wenigen Erklärungsversuchen in der Stellarastronomie zukommt, die nicht durch den blossen Augenschein sofort bewiesen werden können."

Zum Schlusse muss ich nochmals, obwohl nur ungern, auf Herrn Burnham zurückkommen. Nachdem ich die Angriffe des genannten Herrn ausführlich zurückgewiesen[1]) und gezeigt hatte, welche sonderbaren Vorstellungen er sich über systematische Beobachtungsfehler gebildet hat, hat es Herr Burnham für gut befunden in No. 120 der Zeitschrift „Astronomy and Astrophysics" nicht nur seine Behauptungen zu wiederholen, sondern dies in einem Tone zu thun, den ich als ganz ungehörig auf das Entschiedenste zurückweisen muss. Auf seine Argumente nochmals einzugehen, dazu liegt auch nicht die mindeste Veranlassung vor, da diese durch meine früheren Aufsätze vollständig widerlegt sind. Ich kann mir aber nicht versagen, Nr. III der zuletzt genannten Burnham'schen Notiz hier abzudrucken, weil die Eigenart ihres Verfassers hierdurch sich von selbst kennzeichnet. „It is evident that Professor Seeliger has had little practical experience in double stars work, or he would not have criticised my remark that the close pair of ε Hydrae could

1) Ueber Herrn Burnham's „Invisible Double Stars" und insbesondere über ε Hydrae. Astron. Nachrichten, Band 132.

Ueber eine Verallgemeinerung der v. Helmholtz'schen Wirbel-Integrale, welcher eine unendliche Mannigfaltigkeit von mechanischen Bildern der Maxwell-schen Elektrodynamik entspricht.

Von Dr. J. R. Schütz.

(Eingelaufen 2. Juni.)

1. Wir setzen eine unendlich ausgedehnte reibungslose Flüssigkeitsmasse voraus, der wir vorläufig die Beschränkung der Incompressibilität noch nicht auferlegen wollen; wir betrachten vorerst nur solche Gebiete derselben, in welchen die 3 rechtwinkligen Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 eindeutige und mit allen ihren Derivirten endliche und stetige Funktionen der 3 rechtwinkligen Raumcoordinaten x, y, z sind. Im Unendlichen soll die Flüssigkeit ruhen.

Ueberall dort, wo die Grössen u_1, v_1, w_1 eine Potentialfunktion Φ_1 (das Geschwindigkeitspotential) besitzen, werden die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \qquad 1)$$

Dort wo die Potentialfunktion Φ_1 zu existiren aufhört, werden gewisse Bewegungen auftreten, die v. Helmholtz in seiner Abhandlung „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen etc". Crelle's Journal, Bd. 55, S. 25—55, 1858 unter dem Namen der „Wirbelbewegungen" eingeführt hat.

Dort wo Φ_3 zu existiren aufhört, setzen wir wieder

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z}\right), \quad v_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x}\right),$$

$$w_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y}\right) \qquad 6)$$

Die Grössen u_4, v_4, w_4 nennen wir die Wirbelgeschwindigkeiten zweiter Ordnung und eine etwa existirende Potentialfunktion Φ_4 derselben das „Wirbelpotential zweiter Ordnung". In diesem Sinne sind dann u_2, v_2, w_2, bezw. Φ_2 die Wirbelgeschwindigkeiten bezw. das Wirbelpotential erster Ordnung.

Man sieht schon, wie sich der Faden weiter spinnt. Allgemein zu reden, nennen wir die Grössen u_{2n-1}, v_{2n-1}, w_{2n-1}, Φ_{2n-1} die Strömungsgeschwindigkeiten und das Strömungspotential $n$ter Ordnung und die Grössen u_{2n}, v_{2n}, w_{2n}, Φ_{2n} die Wirbelgeschwindigkeiten und das Wirbelpotential $n$ter Ordnung.

3. Die formale Uebereinstimmung der Differenzialgleichungen 4) und 6) lässt erwarten, dass auch die Integraleigenschaften der Wirbel und Strömungen höherer Ordnung wesentlich übereinstimmen. Es wird sich daher zur Abkürzung empfehlen, dass wir uns für beide zuweilen eines gemeinsamen Namens bedienen, und wir wählen hiefür, nicht ohne die Absicht, an den verwandten Quaternionen-Begriff des curl (vgl. Boltzmann, Vorl. II pag. 3) anzuklingen, den Ausdruck „Quirl".

Demnach nennen wir die Grössen u_k, v_k, w_k die nach den 3 rechtwinkligen Coordinatenaxen geschätzten Quirlgeschwindigkeiten $k$ter Ordnung und Φ_k das Quirlpotential $k$ter Ordnung, und erinnern uns, wenn erforderlich, daran, dass diese Grössen Strömungsgeschwindigkeiten bezw. ein Strömungspotential bedeuten, wenn k ungerade, dagegen Wirbelgeschwindigkeiten bezw. ein Wirbelpotential, wenn k gerade ist.

2. Wirbelpotential nenne ich eine Funktion Φ_2, deren Ableitungen nach den Coordinaten die nach diesen geschätzten Wirbelgeschwindigkeiten geben. Die Wirbelgeschwindigkeiten u_2, v_2, w_2 sind definirt durch die Gleichungen

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right), \quad v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right),$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \qquad 2)$$

Dort wo ein Wirbelpotential existirt, wird sein

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \qquad 3)$$

An allen Stellen aber, wo diese Potentialfunktion zu existiren aufhört, setzen wir

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right), \quad v_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\right),$$

$$w_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) \qquad 4)$$

Die Grössen u_3, v_3, w_3 haben eine einfache und anschauliche physikalische Bedeutung, von der später noch die Rede sein wird; wir wollen sie die „Strömungsgeschwindigkeiten zweiter Ordnung" nennen. Die Grössen u_1, v_1, w_1 sind dann für uns die Strömungsgeschwindigkeiten erster Ordnung.

Es wird Stellen geben können, woselbst die Grössen u_3, v_3, w_3 sich als Ableitungen einer Funktion Φ_3 darstellen lassen. Wir nennen diese Funktion das „Strömungspotential zweiter Ordnung" (Φ_1 ist dann für uns das Strömungspotential erster Ordnung).

An allen diesen Stellen wird sein

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} = \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \qquad 5)$$

potential 1. Ordnung), dann solche R_3, die lediglich ein Quirlpotential 3. Ordnung (d. i. ein Geschwindigkeitspotential 2. Ordnung) bis zu solchen Bereichen R_k, die lediglich ein Quirlpotential $k$ter Ordnung besitzen. Wir können jetzt den obigen Satz auch so aussprechen:

In einem Bereiche R_k coexistiren nothwendig sämmtliche Arten von Quirlbewegungen, deren Ordnungszahl kleiner ist als k, und es existirt darin keine Quirlbewegung von einer grösseren Ordnungszahl. (Satz I.)

5. Jedes Quirlpotential Φ_k ($k > 1$) genügt der Laplace'schen Differentialgleichung (Satz II). Aus Gl. 7 ergibt sich (für $k > 1$)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial z} = 0 \qquad 10)$$

Für den Fall der Existenz einer Potentialfunktion kann diese Gleichung so geschrieben werden

$$\Delta \Phi_k = 0 \qquad 11)$$

Die Gleichung 10) gilt nicht für $k = 1$; nur, wenn die Flüssigkeit incompressibel ist, hat man auch

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \qquad 12)$$

Es müssen daher alle nachfolgenden Sätze, insoweit sie sich auf den Eingangs dieses Artikels angegebenen Satz stützen, entweder unter der beschränkenden Annahme $k > 1$, oder unter der Voraussetzung der Incompressibilität der Flüssigkeit verstanden werden.

6. Es kann nicht ein einziger Bereich R_k die ganze unendliche Flüssigkeitsmasse erfüllen. (Satz III.) Denn man hätte dann eine Funktion Φ_k, welche im ganzen unendlichen Raume der Gleichung $\Delta \Phi_k = 0$ genügte und im Unendlichen, da die Flüssigkeit daselbst als ruhend vorausgesetzt wird, gegen einen constanten Werth C limitirte. Genau so gross

Man hat für die Quirlgeschwindigkeiten $k$ter Ordnung die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{k-1}}{\partial y} - \frac{\partial v_{k-1}}{\partial z}\right) \\ v_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} - \frac{\partial w_{k-1}}{\partial x}\right) \\ w_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_{k-1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Für den Fall der Existenz eines Quirlpotentials Φ_k ist

$$u_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x}, \quad v_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}, \quad w_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \qquad 8)$$

und

$$\frac{\partial w_k}{\partial y} - \frac{\partial v_k}{\partial z} = \frac{\partial u_k}{\partial z} - \frac{\partial w_k}{\partial x} = \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y} = 0 \qquad 9)$$

Es lassen sich über die Wechselbeziehungen der Quirl verschiedener Ordnung zu einander eine grosse Reihe von Sätzen ableiten, von denen wir hier nur solche anführen wollen, die für unsere späteren Entwicklungen von einiger Bedeutung sind.

4. Existirt in einem Bereiche R ein Quirlpotential $k$ter Ordnung als variable Funktion der Coordinaten, so sind die Quirlpotentiale von höherer Ordnungszahl in demselben Bereiche constante Grössen, Quirlpotentiale von niederer Ordnungszahl aber können in demselben Bereiche nicht existiren. Denn es ist in diesem Bereiche nach Gl. 9)

$$u_{k+1} = v_{k+1} = w_{k+1} = 0, \text{ also } \Phi_{k+1} = \text{const.}$$

und dasselbe gilt natürlich auch von den analogen Grössen noch höherer Ordnungszahl. Der zweite Theil des obigen Satzes ist eine nothwendige Consequenz des ersten Theiles.

Man kann daher aus der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse solche Bereiche R_1 hervorheben, die lediglich ein Quirlpotential erster Ordnung Φ_1 (d. i. ein Geschwindigkeitspotential) besitzen, dann solche Bereiche R_2, die lediglich ein Quirlpotential zweiter Ordnung Φ_2 (d. i. ein Wirbel-

deren überhaupt kein Quirlpotential irgend welcher Ordnungszahl existirt. (V.)

Dieser Satz ist eine nothwendige Consequenz der Sätze III und IV. Wir wollen diese Gebiete die „charakteristischen Schichten" nennen; nach Satz IV muss jeder Bereich R_k von einer solchen charakteristischen Schicht vollständig eingehüllt sein. Sie soll im Allgemeinen als von endlicher Dicke vorausgesetzt sein. An Stellen, wo sie unendlich dünn wird, degenerirt sie zu einer wahren Discontinuität; solche und andere Discontinuitäten wollen wir, wie schon Eingangs im Artikel 1 bemerkt ist, von unserer Betrachtung ausschliessen. Wir denken uns hiezu jede derselben einzeln von einer sie ganz umschliessenden, einfach zusammenhängenden Fläche umgeben, die wir passend „Discontinuitätshülle" nennen können. Die Flüssigkeit, die sich ausserhalb dieser Discontinuitätshüllen befindet, ist für uns die „betrachtete Flüssigkeitsmasse".

9. Ein für uns sehr wichtiger Satz ist der folgende: Die Bewegung der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse ist zu irgend einem Zeitmomente überall eindeutig bestimmt, wenn in demselben Zeitmomente die Quirlgeschwindigkeiten irgend einer beliebigen Ordnungszahl n in allen charakteristischen Schichten gegeben sind und gleichzeitig auch die Bewegung der Flüssigkeit an den Discontinuitätshüllen vorgeschrieben ist. (VI.)

Man erhält aus den Gleichungen 7), indem man in denselben die Grössen u_{k-1}, v_{k-1}, w_{k-1} durch die Grössen u_{k-2}, v_{k-2}, w_{k-2} ersetzt, die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Theta_{k-2}}{\partial x} - \Delta u_{k-2}\right) \\ v_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Theta_{k-2}}{\partial y} - \Delta v_{k-2}\right) \\ w_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Theta_{k-2}}{\partial z} - \Delta w_{k-2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

würde daher auch das arithmetische Mittel der Funktionswerthe von Φ_k auf der Oberfläche einer Kugel sein, die man mit unendlich grossem Radius um einen im Endlichen gelegenen Punkt P beschriebe. Gemäss einem nach Herrn Riemann benannten Satze der Potentialtheorie müsste daher auch im Punkte P, und weil dieser beliebig gewählt wurde, überall im Endlichen $\Phi_k = C$ sein. Nach Satz I müsste demnach die Ordnungszahl des Bereiches R_k kleiner sein als k und sie könnte, da k beliebig ist, nur gleich 1 sein, aber auch dies nur dann, wenn die Flüssigkeit compressibel ist.

7. Es kann nicht ein Bereich R_k einem Bereiche R_m unmittelbar benachbart sein, es sei denn $k = m$. (IV.)

Denn setzen wir etwa willkürlich $m > k$, dann würde nach Satz I das Quirlpotential Φ_k im Bereiche R_k existiren, im Bereiche R_m aber zu existiren aufhören. Dagegen würde das Quirlpotential Φ_m sowohl im Raume R_m als auch im Raume R_k existiren, im letzteren Bereiche aber als Constante. Da die beiden Bereiche einander unmittelbar benachbart sein sollen, so muss ein Theil ihrer Begrenzungsflächen beiden gemeinsam sein. Denkt man sich diesen Theil entfernt, so erhielte man einen grösseren Bereich, in welchem eine Funktion Φ_m existirte, die überall der Laplace'schen Differentialgleichung genügte und in einem endlichen Theile des Bereiches einen constanten Werth C besässe. Wir können dann eine Kugelfläche so construiren, dass deren Mittelpunkt in diesem Bereiche, in welchem $\Phi_m = C$ ist, liegt, und die zum Theil in diesen Bereich selbst fällt, zum Theile aber in eine Region taucht, in der Φ_m grösser (oder kleiner) als C wird. Dann müsste aber auch das arithmetische Mittel der Funktionswerthe von Φ_m auf der Kugeloberfläche grösser (oder kleiner) als C sein, und dies wäre ein Widerspruch gegen den Riemann'schen Satz.

8. Es muss in der bewegten Flüssigkeitsmasse Bereiche, mindestens aber einen geben, innerhalb

der Gleichung 18) und 18a) ergibt — in der ganzen betrachteten Flüssigkeit die Laplace'schen Differentialgleichungen befriedigen und an den Discontinuitätshüllen, sowie im Unendlichen verschwinden. Die — zufolge des Dirichlet'schen Principes einzige — Lösung hiefür ist

$$u_{n-1} - \mathfrak{u}_{n-1} = v_{n-1} - \mathfrak{v}_{n-1} = w_{n-1} - \mathfrak{w}_{n-1} = 0.$$

Es sind demnach die Quirlgeschwindigkeiten (n — 1) ter Ordnung und, da sich dieses Beweisverfahren beliebig oft wiederholen lässt, auch jene von beliebig anderer Ordnungszahl, demnach die gesammte Bewegung der Flüssigkeit eindeutig bestimmt.

Sind nun nicht in der ganzen Flüssigkeit, sondern bloss an den charakteristischen Stellen die Grössen u_n', v_n', w_n' gegeben, so lässt sich dieser Fall immer auf den durch den Hilfssatz präcisirten Fall zurückführen. Denn sei etwa R_k derjenige Bereich, der unter allen Bereichen R_1 bis R_k die höchste Ordnungszahl k hat, so bilden wir, wenn $n < k$ ist, aus den Grössen u_n', v_n', w_n' durch fortgesetztes Differenziren nach dem Schema der Gleichung 7) die Grössen

$$u_{k+1}', \quad v_{k+1}', \quad w_{k+1}' \tag{19}$$

Da nun die Quirlgeschwindigkeiten $(k+1)$ ter Ordnung in der ganzen Flüssigkeitsmasse, mit Ausschluss der charakteristischen Schichten, verschwinden, in diesen letzteren aber die gegebenen Werthe 19) haben, so darf man sie in der gesammten Flüssigkeitsmasse als gegeben betrachten.

Ist aber $n > k$, dann sind ohnehin schon die Grössen u_n, v_n, w_n in allen Bereichen R_1 bis R_k gleich Null, also gleichfalls in der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse gegeben.

10. Ein specieller Fall des vorigen Satzes ist der folgende: Sind in einem Augenblicke die Geschwindigkeiten u_1', v_1', w_1' in allen charakteristischen Schichten sowie an den

Hiebei ist

$$\Theta_{k-2} = \frac{\partial u_{k-2}}{\partial x} + \frac{\partial v_{k-2}}{\partial y} + \frac{\partial w_{k-2}}{\partial z} \qquad 14)$$

Nach Gleichung 10) verschwindet dieser Ausdruck für $k > 3$; also ist für $k > 1$ und bei incompressibeln Flüssigkeiten auch für $k = 1$

$$u_{k+2} = -\frac{1}{4}\Delta u_k, \quad v_{k+2} = -\frac{1}{4}\Delta v_k, \quad w_{k+2} = -\frac{1}{4}\Delta w_k \qquad 15)$$

Speziell in Bereichen von der Ordnungszahl k ist daher mit Rücksicht auf Satz I

$$\Delta u_{k-1} = 0, \quad \Delta v_{k-1} = 0, \quad \Delta w_{k-1} = 0 \qquad 16)$$

und auch

$$\Delta u_k = 0, \quad \Delta v_k = 0, \quad \Delta w_k = 0 \qquad 17)$$

Wir beweisen nun zunächst folgenden Hilfssatz: Sind in allen Punkten der betrachteten Flüssigkeitsmasse die Quirlgeschwindigkeiten von der Ordnungszahl n, also u_n, v_n, w_n, in einem bestimmten Augenblicke gegeben, und ist gleichzeitig die Bewegung der Flüssigkeit an den Discontinuitätshüllen vorgeschrieben, so sind für denselben Augenblick auch die Quirlgeschwindigkeiten $(n-1)$ter Ordnung u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1} überall eindeutig bestimmt. (VIa.)

Zunächst ist klar, dass auch überall die Quirlintensitäten $(n+1)$ter Ordnung, die ja aus jenen $n$ter Ordnung durch eindeutige Differenzation hervorgehen, gegeben sind. Nun ist nach Gleichung 15)

$$\Delta u_{n-1} = -4 u_{n+1}, \; \Delta v_{n-1} = -4 v_{n+1}, \; \Delta w_{n-1} = -4 w_{n+1}; \qquad 18)$$

gäbe es noch 3 andere Funktionen $\mathfrak{u}_{n-1}$, $\mathfrak{v}_{n-1}$, $\mathfrak{w}_{n-1}$, welche denselben Differentialgleichungen

$$\Delta \mathfrak{u}_{n-1} = -4 u_{n+1}, \text{ etc.} \qquad 18a)$$

genügten, so wären $u_{n-1} - \mathfrak{u}_{n-1}$, $v_{n-1} - \mathfrak{v}_{n-1}$, $w_{n-1} - \mathfrak{w}_{n-1}$ drei neue Funktionen, welche — wie sich durch Subtraktion

der Gleichung 18) und 18a) ergibt — in der ganzen betrachteten Flüssigkeit die Laplace'schen Differentialgleichungen befriedigen und an den Discontinuitätshüllen, sowie im Unendlichen verschwinden. Die — zufolge des Dirichlet'schen Principes einzige — Lösung hiefür ist

$$u_{n-1} - \mathfrak{u}_{n-1} = v_{n-1} - \mathfrak{v}_{n-1} = w_{n-1} - \mathfrak{w}_{n-1} = 0.$$

Es sind demnach die Quirlgeschwindigkeiten (n—1)ter Ordnung und, da sich dieses Beweisverfahren beliebig oft wiederholen lässt, auch jene von beliebig anderer Ordnungszahl, demnach die gesammte Bewegung der Flüssigkeit eindeutig bestimmt.

Sind nun nicht in der ganzen Flüssigkeit, sondern bloss an den charakteristischen Stellen die Grössen u'_n, v'_n, w'_n gegeben, so lässt sich dieser Fall immer auf den durch den Hilfssatz präcisirten Fall zurückführen. Denn sei etwa R_k derjenige Bereich, der unter allen Bereichen R_1 bis R_k die höchste Ordnungszahl k hat, so bilden wir, wenn $n \leqq k$ ist, aus den Grössen u'_n, v'_n, w'_n durch fortgesetztes Differenziren nach dem Schema der Gleichung 7) die Grössen

$$u'_{k+1}, \quad v'_{k+1}, \quad w'_{k+1} \tag{19}$$

Da nun die Quirlgeschwindigkeiten $(k+1)$ter Ordnung in der ganzen Flüssigkeitsmasse, mit Ausschluss der charakteristischen Schichten, verschwinden, in diesen letzteren aber die gegebenen Werthe 19) haben, so darf man sie in der gesammten Flüssigkeitsmasse als gegeben betrachten.

Ist aber $n > k$, dann sind ohnehin schon die Grössen u_n, v_n, w_n in allen Bereichen R_1 bis R_k gleich Null, also gleichfalls in der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse gegeben.

10. Ein specieller Fall des vorigen Satzes ist der folgende: Sind in einem Augenblicke die Geschwindigkeiten u'_1, v'_1, w'_1 in allen charakteristischen Schichten sowie an den

Discontinuitätshüllen gegeben, so sind für denselben Augenblick die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 überall eindeutig bestimmt. Es sollen hier die drei letzteren Grössen aus den drei ersteren berechnet werden.

Es sei wieder R_k jener Quirlbereich, der die höchste Ordnungszahl k besitzt. Die auf die Zahl k zunächst folgende ungerade Zahl bezeichnen wir mit $2i+1$; sie ist — unabhängig davon ob k selbst eine gerade oder ungerade Zahl ist — jedenfalls durch die Formel gegeben

$$2i + 1 = k + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k,$$

woraus folgt

$$i = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-1)^k \tag{20}$$

Durch i-malige Anwendung der Δ-Operation auf die gegebenen Funktionen u_1', v_1', w_1' erhält man gemäss Formel 15) — wenn wir uns für die i-malige Anwendung der gedachten Operation des Symboles Δ^i bedienen —

$$\Delta^i u_1' = (-4)^i u_{2i+1}', \quad \Delta^i v_1' = (-4)^i v_{2i+1}', \quad \Delta^i w_1' = (-4)^i w_{2i+1}' \tag{21}$$

Ganz ebenso würde man durch i-malige Anwendung der Δ-Operation auf die zu suchenden Funktionen u_1, v_1, w_1 erhalten

$$\Delta^i u_1 = (-4)^i u_{2i+1} \text{ etc.} \tag{21a}$$

Nun sind aber die Grössen u_{2i+1}' und u_{2i+1} nicht nur in den charakteristischen Schichten, sondern auch in allen Quirlbereichen R_1 bis R_k einander gleich, weil sie daselbst — wegen $2i+1 > k$ — überall verschwinden. Also erhält man die Differentialgleichungen

$$\Delta^i u_1 = \Delta^i v_1', \quad \Delta^i v_1 = \Delta^i v_1', \quad \Delta^i w_1 = \Delta^i w_1' \tag{22}$$

Die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen lauten:

zu versinnlichen, wollen wir annehmen, es sei ein aus der betrachteten Flüssigkeitsmasse herausgetheilter zweifach zusammenhängender Raum mit lauter Quirlfäden $k$ter Ordnung so erfüllt, dass er einen Quirlbereich R_k (im Sinne des Artikels 4) darstelle. Gemäss Artikel 7 und 8 muss dieser Quirlbereich zunächst von einer charakteristischen Schicht S umgeben sein, von welcher wir annehmen wollen, dass ihre Dicke sehr klein gegenüber den Dimensionen des Bereiches R_k ist. Die ganze übrige betrachtete Flüssigkeitsmasse soll ein Bereich R_{k-1} von der nächstniederen Ordnungszahl sein. Bezeichnen wieder u_k, v_k, w_k die Quirlgeschwindigkeiten im Bereiche R_k und u'_k, v'_k, w'_k dieselben Grössen in der charakteristischen Schicht, so ist für alle Punkte der betrachteten Flüssigkeitsmasse (die wir zur Vereinfachung so gross voraussetzen wollen, dass wir die Randbedingungen vernachlässigen können)

$$u_{k-2} = \frac{1}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{u_k\,dx\,dy\,dz}{r} + \frac{1}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{u'_k\,dx\,dy\,dz}{r}$$

Das erste Integral ist über den Bereich R_k zu erstrecken, das zweite über die charakteristische Schicht S. Wir wollen annehmen, dass letztere so dünn ist, dass der Beitrag, den das zweite Integral liefert, gegenüber dem des ersten verschwindet. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} u_{k-2} &= \frac{1}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{u_k\,dx\,dy\,dz}{r} \\ v_{k-2} &= \frac{1}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{v_k\,dx\,dy\,dz}{r} \\ w_{k-2} &= \frac{1}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{w_k\,dx\,dy\,dz}{r} \end{aligned}\right\} \qquad 28)$$

Wir führen nun statt des Volumelements $dx\,dy\,dz$ das Produkt $dq \cdot ds$ ein, d. i. jenes Volum, welches ein Längenelement ds des Quirlfadens vom Querschnitte dq besitzt. Ferner setzen wir

Bewegung und den elektrodynamischen Erscheinungen besteht. Die Gleichungen 23) lehren, dass man eine unendliche Mannigfaltigkeit solcher Analogieen angeben kann. Bevor wir auf dieselben mit einigen Worten eingehen, wollen wir noch den Begriff der „Wirbellinie" verallgemeinern.

11. Wir verstehen unter einer „Quirllinie $k$ter Ordnung" eine Curve, welche der Differentialgleichung genügt

$$dx : dy : dz = u_k : v_k : w_k, \qquad 25)$$

und unter einem „Quirlfaden" einen unendlich dünnen Faden, welcher aus der Flüssigkeit ausgeschnitten wird, wenn man durch alle Punkte des Umfanges einer unendlich kleinen Fläche die Quirllinien zieht. Auch erinnern wir uns wieder, dass wir es mit Stromlinien, bezw. -Fäden zu thun haben, wenn k ungerade ist, dagegen mit Wirbellinien bezw. -Fäden, wenn k gerade ist.

Durch Anwendung des Green'schen Satzes auf die Gleichung 10) erhalten wir

$$\int \nu_k \, d\, q = 0 \qquad 26)$$

Hiebei bezeichnet ν_k die normal zum Oberflächenelemente dq geschätzte Componente der Quirlgeschwindigkeit $k$ter Ordnung. Wir nennen die Gleichung 26) die allgemeine Continuitätsgleichung der Quirlbewegungen; sie lehrt, dass kein Quirlfaden beliebiger Ordnungszahl inmitten der Flüssigkeit enden kann und dass für einen und denselben Quirlfaden das Produkt aus seinem Querschnitt und der Quirlgeschwindigkeit

$$\nu_k \cdot d\, q = i_k = \text{constans} \qquad 27)$$

für seine ganze Erstreckung einen constanten Werth behalten muss.

12. Um uns nun die erwähnte unendliche Mannigfaltigkeit der elektrodynamischen Analogieen an einem Beispiele

$$\frac{i_k\, ds \sin(ds, r)}{r^2} \qquad 29)$$

ist, und deren Richtung n senkrecht zu jener Ebene steht, die durch das Fadenelement ds und das betrachtete Flüssigkeitstheilchen bestimmt ist.

13. Es besteht also zwischen den Quirllinien $k$ter und $(k-1)$ter Ordnung genau dieselbe Wechselbeziehung, die auch zwischen den elektrischen Stromlinien und den magnetischen Kraftlinien statt hat. (Vgl. hiezu Boltzmann, Vorlesungen I pag. 90.) Wäre etwa der Bereich R_k ein metallischer Leiter, innerhalb dessen das Strompotential Φ_k bestünde, so würde die hiedurch bedingte elektrische Strömung im Aussenraum eine Vertheilung der magnetischen Kraftlinien hervorrufen, die sich der Grösse und Richtung nach vollkommen mit der Vertheilung der Quirllinien $(k-1)$ter Ordnung im Bereiche R_{k-1} decken würde.

Es entspricht diese Analogie genau jener, welche v. Helmholtz a. a. O. abgeleitet hat und welche man hier erhält, wenn man $k = 2$ setzt. Für $k = 3$ erhält man das hydrodynamische Bild, welches Boltzmann in den Sitzungsberichten der bayerischen Akademie[1]) 1892 pag. 279 zur Maxwell'schen Elektrodynamik in Analogie gesetzt hat. Mit Bezug auf diese letztere Abhandlung, welche diese Analogie insbesonders auch für quasielastische Media mechanisch ausbaut, sei hier die übrigens selbstverständliche Bemerkung gemacht, dass unsere bisherigen Betrachtungen, da sie ja rein geometrischer Natur sind und desshalb jedweder physikalischen Voraussetzung entbehren können, natürlich auf jedes beliebige continuirliche Medium anwendbar sind.

14. Wir wollen aber sogleich eine andere wesentlich mechanische Analogie ableiten, welche die verwandtschaft-

1) Abgedruckt in Wiedemann's Annalen, Bd. 48 pag. 78.

$$u_k = \nu_k \cdot \alpha, \quad v_k = \nu_k \cdot \beta, \quad w_k = \nu_k \cdot \gamma,$$

wobei ν_k die resultirende Quirlgeschwindigkeit und α, β, γ die Richtungscosinus des ds sind.

Berücksichtigen wir endlich noch, dass das Produkt $\nu_k \cdot dq$ für die ganze Erstreckung des Wirbelfadens einen constanten Werth i_k besitzt (Gleichung 27), so lauten die Gleichungen 28) jetzt

$$u_{k-2} = \int i_k ds \cdot \alpha \frac{1}{r}, \quad v_{k-2} = \int i_k ds \cdot \beta \frac{1}{r}, \quad w_{k-2} = \int i_k ds \cdot \gamma \frac{1}{r}$$

Hieraus erhalten wir für u_{k-1}

$$u_{k-1} = \int i_k ds \left[\gamma \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} - \beta \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} \right]$$

oder, wenn φ, χ, ψ die Richtungscosinus der Geraden r bezeichnen,

$$u_{k-1} = -\int i_k \frac{ds}{r^2} [\gamma\chi - \beta\psi]$$

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist gleich dem Produkte $\sin(ds, r) \cdot \cos(n, x)$, wo n die auf ds und r senkrecht stehende Richtung ist; also ist

$$u_{k-1} = \int \frac{i_k\, ds \cdot \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, x), \quad \text{und analog}$$

$$v_{k-1} = \int \frac{i_k\, ds \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, y),$$

$$w_{k-1} = \int \frac{i_k\, ds \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, z).$$

Man kann diese Formeln so aussprechen: Jedes Element ds eines Quirlfadens von der Ordnungszahl k bedingt in jedem Theilchen der Flüssigkeitsmasse eine Quirlgeschwindigkeit von der Ordnungszahl $(k-1)$, deren Grösse gleich dem Ausdrucke

$$\frac{i_k\, ds \sin(ds, r)}{r^2} \tag{29}$$

ist, und deren Richtung n senkrecht zu jener Ebene steht, die durch das Fadenelement ds und das betrachtete Flüssigkeitstheilchen bestimmt ist.

13. Es besteht also zwischen den Quirllinien k ter und $(k-1)$ ter Ordnung genau dieselbe Wechselbeziehung, die auch zwischen den elektrischen Stromlinien und den magnetischen Kraftlinien statt hat. (Vgl. hiezu Boltzmann, Vorlesungen I pag. 90.) Wäre etwa der Bereich R_k ein metallischer Leiter, innerhalb dessen das Strompotential Φ_k bestünde, so würde die hiedurch bedingte elektrische Strömung im Aussenraum eine Vertheilung der magnetischen Kraftlinien hervorrufen, die sich der Grösse und Richtung nach vollkommen mit der Vertheilung der Quirllinien $(k-1)$ ter Ordnung im Bereiche R_{k-1} decken würde.

Es entspricht diese Analogie genau jener, welche v. Helmholtz a. a. O. abgeleitet hat und welche man hier erhält, wenn man $k=2$ setzt. Für $k=3$ erhält man das hydrodynamische Bild, welches Boltzmann in den Sitzungsberichten der bayerischen Akademie[1]) 1892 pag. 279 zur Maxwell'schen Elektrodynamik in Analogie gesetzt hat. Mit Bezug auf diese letztere Abhandlung, welche diese Analogie insbesonders auch für quasielastische Media mechanisch ausbaut, sei hier die übrigens selbstverständliche Bemerkung gemacht, dass unsere bisherigen Betrachtungen, da sie ja rein geometrischer Natur sind und desshalb jedweder physikalischen Voraussetzung entbehren können, natürlich auf jedes beliebige continuirliche Medium anwendbar sind.

14. Wir wollen aber sogleich eine andere wesentlich mechanische Analogie ableiten, welche die verwandtschaft-

1) Abgedruckt in Wiedemann's Annalen, Bd. 48 pag. 78.

lichen Beziehungen zwischen den allgemeinen Quirlbewegungen und den elektrodynamischen Phänomenen sehr enge knüpft.

Wir gehen dabei von den Integralen der Gleichung 23) aus; doch machen wir auch hier wieder die vereinfachende Annahme, dass die betrachtete Flüssigkeitsmasse so gross ist, dass wir die Oberflächenbedingungen vernachlässigen dürfen, sowie dass die charakteristischen Schichten im Vergleiche zu den Dimensionen der von ihnen umhüllten Quirlbereiche so dünn sind, dass ihre Beiträge in die Bewegung der betrachteten Flüssigkeitsmasse verschwindend klein sind. Wir behandeln den Fall, dass in der Flüssigkeit neben Quirlbereichen beliebig anderer Ordnungszahlen sich zwei Quirlbereiche R_k und R'_k von der Ordnungszahl k vorfinden, und es sei k die grösste unter den vorhandenen Ordnungszahlen. Φ_k und Φ'_k seien die Quirlpotentiale in diesen Bereichen, ν_k und ν'_k die Quirlgeschwindigkeiten in denselben und u_k, v_k, w_k, beziehlich u'_k, v'_k, w'_k deren Componenten.

Hier haben wir nun zum erstenmale zwischen den Strömungen und den Wirbeln höherer Ordnung zu unterscheiden. Wir wollen vorerst den einfacheren Fall betrachten und annehmen, es sei k eine ungerade Zahl $2i+1$. Wir haben es also mit Strömungen zu thun.

Es seien u_1, v_1, w_1 die Geschwindigkeiten, welche irgend ein Flüssigkeitstheilchen $(dx \cdot dy \cdot dz)$ haben würde, wenn bloss der eine Quirlbereich R_k, und u'_1, v'_1, w'_1, jene, wenn bloss der zweite Quirlbereich R'_k vorhanden wäre. Die Geschwindigkeiten, die dasselbe Flüssigkeitstheilchen bei der Coexistenz beider Quirlbereiche R_k und R'_k hat, sind dann wegen der Linearität der Gleichungen 21a)

$$u_1 + u'_1, \; v_1 + v'_1, \; w_1 + w'_1 \qquad 30)$$

Es ist noch wichtig, zu bemerken, dass die Grössen u_k, v_k, w_k bei gegebener Configuration der Systeme vollkommen unabhängig von den Grössen u'_k, v'_k, w'_k sind, so dass,

wenn z. B. bloss der eine Quirlbereich R_k' existiren würde, an den Stellen, wo sich der von diesen weggedachte Quirlbereich R_k befindet, die Grössen u_k, v_k, w_k sämmtlich gleich Null wären, und umgekehrt.

15. Unter all den Voraussetzungen des vorhergehenden Artikels erhalten wir für u_1 in Anlehnung an Gleichung 23) das Integral

$$u_1 = \frac{1}{\pi} \int\int\int \frac{d x_i \, d y_i \, d z_i}{r_i} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\int\int\int \frac{d x_2 \, d y_2 \, d z_2}{r_{2,3}} \int\int\int \frac{d x_1 \, d y_1 \, d z_1 \, u_k}{r_{1,2}} \tag{31}$$

Um das letzte dreifache Integral in ein Linienintegral zu verwandeln, zerlegen wir den Quirlbereich R_k, der allenfalls die Form eines Ringes hat, durch einander unendlich nah geführte Querschnitte in unendlich viele Cylinder von unendlich kleiner Höhe ds. Diese Querschnitte q sollen so geführt werden, dass sie zur resultirenden Geschwindigkeit ν_k überall normal stehen. Ausserdem zertheilen wir das ganze Bündel von Quirlfäden, welches die charakteristische Schicht erfüllt, in N unendlich dünne Quirlfäden so, dass das Produkt aus dem Querschnitt dq eines Fadens in dessen Quirlgeschwindigkeit ν_k gleich einer für alle Fäden constanten Grösse p_k ist

$$d q \cdot \nu_k = p_k = \text{constans.}$$

Dann kann man setzen

$$\int\int\int \frac{d x_1 \, d y_1 \, d z_1 \;\, u_k}{r_{1,2}} = p_k \int \frac{d s \cos (d s, x}{r}$$

und es lautet die Gleichung 30):

$$u_1 = p_k \int\int\int \frac{1}{\pi^i} \frac{d x_i \, d y_i \, d x_i}{r_i} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\int\int\int \frac{d x_2 \, d y_2 \, d z_2}{r_{2,3}} \int \frac{d s, \cos (d s, x)}{r} \tag{32}$$

Das letzte einfache Integral ist über alle Quirlfäden einzeln zu erstrecken. Nimmt man an, dass alle Quirlfäden nahezu parallel laufen und dass überdies der gesammte Querschnitt des Quirlbereichs klein ist, dann darf man $N = 1$ setzen, und es braucht das Integral bloss über einen einzigen Stromfaden erstreckt werden. p_k können wir dann passend die Quirlintensität des Bereiches R_k nennen.

Zur Abkürzung bezeichnen wir noch das gesammte vielfache Integral der Gleichung 32) mit J_x, so dass

$$u_1 = p_k \cdot J_x, \quad v_1 = p_k \cdot J_y, \quad w_1 = p_k \cdot J_z \tag{33}$$

ist, wo J_y und J_z analog zu J_x zu bilden sind.

Ganz ebenso erhält man für die vom zweiten Quirlbereich R_k' bedingten Geschwindigkeiten u_1', v_1', w_1' unseres Flüssigkeitstheilchens die Werthe

$$u_1' = p_k' J_x', \quad v_1' = p_k' J_y', \quad w_1' = p_k' J_z' \tag{34}$$

16. Mit Rücksicht auf 30, 33 und 34 erhält man für die gesammte kinetische Energie T der betrachteten Flüssigkeitsmasse den Ausdruck

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} p_k^2 \int\int\int \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) \\ + \frac{1}{2} p_k'^2 \int\int\int \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x'^2 + J_y'^2 + J_z'^2) \\ + p_k p_k' \int\int\int \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x J_x' + J_y J_y' + J_z J_z') \end{aligned} \tag{35}$$

ϱ ist die Dichte der Flüssigkeit.

Wir bezeichnen das erste Integral mit $A_{(h_1, h_2, h_3)}$, das zweite mit $B_{(h_4, h_5, h_6)}$ und das dritte mit $C_{(h_7, h_8, h_9)}$, so dass

$$T = \frac{A_{(h_1, h_2, h_3)}}{2} p_k^2 + \frac{B_{(h_4, h_5, h_6)}}{2} p_k'^2 + C_{(h_7, h_8, h_9)} \, p_k \, p_k' \tag{36}$$

und es seien h_1, h_2, h_3 drei Coordinaten (Parameter), welche die geometrische Configuration des Quirlbereiches R_k bezogen auf seinen Schwerpunkt bestimmen, h_4, h_5, h_6 die analogen

$$\left.\begin{aligned}
A^w &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\right)^2 \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\right)^2\right] \\
B^w &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J'_z}{\partial y} - \frac{\partial J'_y}{\partial z}\right)^2 \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial J'_x}{\partial z} - \frac{\partial J'_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J'_y}{\partial x} - \frac{\partial J'_x}{\partial y}\right)^2\right] \\
C^w &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial J'_z}{\partial y} - \frac{\partial J'_y}{\partial z}\right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial J'_x}{\partial z} - \frac{\partial J'_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial J'_y}{\partial x} - \frac{\partial J'_x}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad 40)$$

Die Grössen J_x, J_y, J_z, J'_x, J'_y, J'_z haben auch hier noch die in Gleichung 39) gegebene Bedeutung; doch ist hier $i = \frac{k}{2}$ zu setzen.

19. Wir wollen die Grössen A, B die Selbstinductionscoefficienten der beiden Quirlbereiche und die Grösse C den wechselseitigen Inductionscoefficienten derselben nennen. Man kann dann die Inductionsgesetze so aussprechen, dass sie allgemein für beliebige Quirlfäden gerader und ungerader Ordnungszahl gelten. Man sagt dann z. B.: „Wird die relative geometrische Configuration der beiden Quirlfäden so geändert, dass dadurch der wechselseitige Inductionscoefficient vergrössert wird, so erregen die Quirlfäden in einander Quirlbewegungen, welche den erregenden entgegengesetzt gerichtet sind.“ Aehnliches gilt für das Gesetz der ponderomotorischen Kräfte. Würde man aber diese Sätze speziell so aussprechen: „N ä h e r t man zwei geradlinige parallele Quirlfäden, so erregen sie in einander etc.“ oder „zwei geradlinige parallele und gleichgerichtete Quirlfäden ziehen einander an“, so wären sie in dieser Form nur für Quirlfäden

18. Es besteht aber in Bezug auf den Richtungssinn, in welchem diese ponderomotorischen und Induktionswirkungen erfolgen, eine bemerkenswerthe Differenzirung zwischen den Quirlbewegungen von gerader und jenen von ungerader Ordnungszahl. Man gelangt zu derselben durch eine Discussion der Parameterfunktionen A, B, C. Wir wollen diese oben mit dem Index s versehen, wenn sie sich auf Quirlbereiche mit ungerader Ordnungszahl (Strömungen) beziehen, dagegen mit dem Index w, wenn sie sich auf solche mit gerader Ordnungszahl (Wirbeln) beziehen. Nach den Festsetzungen der Artikel 15 und 16 haben die A^s, B^s, C^s folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} A^s &= \iiint \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) \\ B^s &= \iiint \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x'^2 + J_y'^2 + J_z'^2) \\ C^s &= \iiint \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x J_x' + J_y J_y' + J_z J_z') \end{aligned}\right\} \quad 38)$$

Hiebei hat J_x den Werth

$$\begin{aligned} J_x = \int\int\int \frac{1}{\pi^i} \frac{dx_i\, dy_i\, dz_i}{r_i} \cdots\cdots \\ \int\int\int \frac{dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{2,3}} \int \frac{ds \cos (ds,x)}{r} \end{aligned} \quad 39)$$

Die Grössen J_y und J_z erhält man, wenn man im letzten einfachen Integral statt cos (ds, x) beziehlich cos (ds, y) und cos (ds, z) setzt, und die Grössen J_x', J_y', J_z' erhält man, wenn man das einfache Integral beziehlich über alle Quirlfäden im Bereiche R_k' erstreckt. Der Index i hat den Zahlenwerth $\frac{k-1}{2}$.

Für die Parameterfunktionen A^w, B^w, C^w aber erhält man folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
A^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\right)^2\right]\\
B^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J'_z}{\partial y} - \frac{\partial J'_y}{\partial z}\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial J'_x}{\partial z} - \frac{\partial J'_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J'_y}{\partial x} - \frac{\partial J'_x}{\partial y}\right)^2\right]\\
C^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial J'_z}{\partial y} - \frac{\partial J'_y}{\partial z}\right)\right.\\
&\left. + \left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial J'_x}{\partial z} - \frac{\partial J'_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial J'_y}{\partial x} - \frac{\partial J'_x}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad 40)$$

Die Grössen J_x, J_y, J_z, J'_x, J'_y, J'_z haben auch hier noch die in Gleichung 39) gegebene Bedeutung; doch ist hier $i = \frac{k}{2}$ zu setzen.

19. Wir wollen die Grössen A, B die Selbstinductionscoefficienten der beiden Quirlbereiche und die Grösse C den wechselseitigen Inductionscoefficienten derselben nennen. Man kann dann die Inductionsgesetze so aussprechen, dass sie allgemein für beliebige Quirlfäden gerader und ungerader Ordnungszahl gelten. Man sagt dann z. B.: „Wird die relative geometrische Configuration der beiden Quirlfäden so geändert, dass dadurch der wechselseitige Inductionscoefficient vergrössert wird, so erregen die Quirlfäden in einander Quirlbewegungen, welche den erregenden entgegengesetzt gerichtet sind.“ Aehnliches gilt für das Gesetz der ponderomotorischen Kräfte. Würde man aber diese Sätze speziell so aussprechen: „Nähert man zwei geradlinige parallele Quirlfäden, so erregen sie in einander etc.“ oder „zwei geradlinige parallele und gleichgerichtete Quirlfäden ziehen einander an“, so wären sie in dieser Form nur für Quirlfäden

mit ungerader Ordnungszahl unbedingt zutreffend; überhaupt gebührt den letzteren auch noch in anderer Hinsicht der Vorzug, wenn man sich darüber entscheiden will, welche Art der Quirlbewegungen man den elektrischen Strömen zuordnen soll; auf einen hieher gehörigen Punkt hat schon Boltzmann[1]) aufmerksam gemacht; man kann die daselbst angewandte Betrachtungsweise leicht auf die Quirl jeder beliebigen geraden Ordnungszahl verallgemeinern. Aber gerade die Discussion der Parameterfunktionen A^s, B^s, C^s und A^w, B^w, C^w liesse sogar auch noch unter den Quirlbewegungen ungerader Ordnungszahl eine spezielle Vorzugswahl treffen. Die letzten Consequenzen, zu denen man dann gelangen würde, kann man aber auch noch auf einem anderen direkteren Wege erreichen. In einer Abhandlung über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für rasch veränderliche Parameter, welche gleichzeitig mit der vorliegenden an anderer Stelle zum Drucke gelangt, findet sich einiges hierüber.

20. Hier sei noch folgendes bemerkt: Unsere Analogieen bleiben auch dann noch bestehen, wenn wir unter u_1, v_1, w_1, nicht die Geschwindigkeiten eines Mediumtheilchens, sondern die einfachen Verschiebungen eines solchen, unter u_k, v_k, w_k aber Grössen verstehen, welche aus jenen durch $k$malige Anwendung der Curl-Operation hervorgehen, nur bedarf es hiezu der Annahme, dass die durch diese Verschiebungen in das Medium gespeicherte (hier potentielle) Energie wiederum dem Ausdrucke $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$ proportional ist. Auch sei besonders noch betont, dass alle unsere Aussagen ihren physikalischen Sinn in voller Strenge nur dann bewahren, wenn wir uns vorstellen, dass alle inneren Kräfte des Mediums stets durch willkürlich hinzugefügte langsam veränderliche äussere Kräfte paralysirt werden.

Es mögen hier noch 2 Sätze Platz finden, welche wir

---

1) Wiedem. Ann. Bd. 48, 1893, p. 95.

als die mechanischen Bilder der beiden Hertz'schen Gleichungssysteme betrachten können:

a) Sind die Quirllinien $(k+1)$ter Ordnung elektrische Stromlinien, so sind die Quirllinien $k$ter Ordnung magnetische Kraftlinien. (Mechanisches Bild des „zweiten“ Hertz'schen Gleichungssystems.)

b) Sind die Quirllinien $k$ter Ordnung magnetische Stromlinien, so sind die Quirllinien $(k-1)$ter Ordnung elektrische Kraftlinien. (Mechanisches Bild des „ersten“ Hertzschen Gleichungssystems.)

Der Begriff des magnetischen Stromes ist dabei natürlich nicht im vulgären elektrotechnischen Sinne zu verstehen, sondern in jener Auffassung, in welcher er zuerst wohl von Hertz (1884) gebraucht und später vornehmlich von Heaviside in die Theorie eingebürgert worden ist.

Der Satz a) gilt — sofern man der Ampère'schen Ansicht vom Wesen des Magnetismus beipflichtet — immer auch umgekehrt, der Satz b) dies aber nur dann, wenn das elektromagnetische Feld frei von elektrostatischer Ladung ist.

Die beiden Sätze a) und b) umfassen — im wohlverstandenen bildlich-mechanischen Sinne — das gesammte Lehrgebäude der Maxwell'schen Theorie der Elektrodynamik des freien Aethers.

München, mathem.-physik. Institut d. Universität.

Sitzung vom 7. Juli 1894.

1. Herr Gustav Bauer hält einen Vortrag: „Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome".

2. Herr Gustav Bauer legt eine Abhandlung des Privatdozenten Dr. Ludwig Maurer in Strassburg: „zur Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen" vor.

3. Herr Ad. v. Baeyer theilt die Resultate seiner neueren Untersuchungen „über das Kümmelöl" mit. Dieselben werden an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

Die Aufstellung dieser Bedingungen führt zu einer Eintheilung der „infinitesimalen Transformationen" der Form

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

in verschiedene Arten.

Nehmen wir an, die zu $C(f)$ gehörige charakteristische Determinante

$$\Delta(p) = | c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} p |^{1)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2 \,.\,. n$$

verschwinde nur für $p = 0$, dann bezeichne ich $C(f)$ als regulär von der ersten Art.

Nehmen wir zweitens an, $\Delta(p)$ verschwinde nur für ganzzahlige Werthe von p und es verschwinden für eine h-fache Wurzel auch alle Unterdeterminanten $n - h + 1$. Grades des Systems

$$| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} p |$$

dann bezeichne ich $C(f)$ als regulär von der zweiten Art. In allen anderen Fällen heisst $C(f)$ irregulär. Diese Bezeichnungen werden auch auf das Coefficientensystem $c_{\lambda\mu}$ angewandt. Ist $C(f)$ irregulär, so kann man immer eine Anzahl regulärer infinitesimaler Transformationen

$$K(f) \quad K_1(f) \quad K_2(f) \,.\,. \quad K_\beta(f)$$

derart bestimmen[2]) dass

$$C(f) = K(f) + \varrho_1 K_1(f) + \varrho_2 K_2(f) \,.\,. + \varrho_\beta K_\beta(f)$$

Von diesen inf. Transformationen ist die erste von der ersten Art, alle übrigen sind von der zweiten Art.

---

1) Das Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ hat den Werth 1 oder 0, je nachdem λ und μ gleich oder ungleich sind.

2) Inv. S. 123.

Die Coefficienten der Differentialgleichungen (γ) genügen Gleichungen der Form

$$(J) \quad \sum_{\nu=1}^{n}\left(c_{\lambda\nu}^{(i)} c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)} c_{\nu\mu}^{(i)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} c_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \qquad i, k = 1, 2, \ldots m$$

Man kann dieselben auch in der symbolischen Form

$$C_i C_k(f) - C_k C_i(f) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} C_j(f)$$

darstellen.

Die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe, die f in sich selbst transformirt, sind als Funktionen von m Parametern $u_1 u_2 \ldots u_m$ definirt durch die Differentialgleichungen

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}^{(j)} P_j^{(i)} \qquad \begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ i = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$$

und die Anfangsbedingung, dass einem bestimmten Werthsystem der Parameter — den Anfangswerthen — die identische Substitution entspricht.

Die m^2 Funktionen $P_j^{(i)}$ der Parameter unterliegen der Bedingung, dass ihre Determinante nicht identisch verschwindet und dass sie insbesondere nicht für die Anfangswerthe der Parameter gleich Null ist.

Die angegebenen Bedingungen reichen — wie aus der allgemeinen Theorie des H. Lie hervorgeht — aus, damit das m-fach unendliche Substitutionensystem

$$y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

eine Gruppe bildet. Damit aber diese Gruppe die umfassendste Gruppe ist, die eine rationale Funktion in sich selbst transformirt, müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein.

$$\frac{d\,b^{(i)}_{\lambda\mu}}{d\,u_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b^{(i)}_{\lambda\nu}\, c^{(i)}_{\nu\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .. n$$

und die Anfangsbedingung $b^{(i)}_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_i = 0$ bestimmt. Die Grössen $b^{(i)}_{\lambda\mu}$ sind in diesem Fall ganze Funktionen von u_i.

Ist dagegen die inf. Transformation $C_i(f)$ von der zweiten Art, so sind die Substitutionscoefficienten $b^{(i)}_{\lambda\mu}$ durch die Differentialgleichungen

$$u_i\,\frac{d\,b^{(i)}_{\lambda\mu}}{d u_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b^{(i)}_{\lambda\nu}\, c^{(i)}_{\nu\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .. n$$

und die Anfangsbedingung $b^{(i)}_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_i = 1$ bestimmt. In diesem Fall sind die Substitutionscoefficienten wenigstens rationale Funktionen des Parameters u_i.

Setzt man nun die m eingliedrigen Gruppen $B_i(u_i)$ zu einer m-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1\, u_2 \,..\, u_m) = B_1(u_1)\, B_2(u_2) \,..\, B_m(u_m)$$

zusammen, so ist klar, dass die Coefficienten der allgemeinen Substitution dieser Gruppe A sich als rationale Funktionen der m Parameter $u_1\, u_2 \,..\, u_m$ ergeben, und zwar gilt dies, wie auch immer die m inf. Transformationen $C_i(f)$ im übrigen gewählt sein mögen, wenn nur eine jede derselben regulär ist.

Setzt man zwei Substitutionen der Gruppe A

$$z_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((v))\, y_\mu \quad y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, .. n$$

zusammen, so erhält man dem Gruppenbegriff gemäss wieder eine Substitution der Gruppe.

Es muss also möglich sein m Funktionen $w_1\, w_2 \,..\, w_m$ der Grössen $u_1\, u_2 \,..\, u_m$; $v_1\, v_2 \,..\, v_m$ der Art zu bestimmen, dass

Die Zerlegung von $C(f)$ in reguläre inf. Transformationen ist im wesentlichen vollkommen bestimmt, d. h. eine Unbestimmtheit tritt nur insoferne ein, als eine jede der inf. Transformationen $K_1(f)$ $K_2(f) \ldots$ $K_\beta(f)$ durch einen Ausdruck der Form

$$\alpha_1 K_1(f) + \alpha_2 K_2(f) \ldots + \alpha_\beta K_\beta(f)$$

mit ganzzahligen Coefficienten $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots$ ersetzt werden kann.

Die oben erwähnten weiteren Bedingungen, denen unsere Gruppe genügen muss, lauten nun:

Kommt unter den inf. Transformationen der Gruppe eine irreguläre Transformation $C(f)$ vor, so gehören der Gruppe auch alle die regulären Transformationen $K(f)$ $K_1(f) \ldots$ $K_\beta(f)$ an, in die $C(f)$ zerlegt werden kann.

Daraus folgt sofort:

Unsere m-gliedrige Gruppe enthält m linear unabhängige reguläre inf. Transformationen.

Sind die angegebenen Bedingungen erfüllt, so kann man die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ als rationale Funktionen von m Parametern $u_1\, u_2 \ldots u_m$ darstellen und daraus folgt dann die Existenz rationaler Funktionen — der Invarianten der Gruppe — die durch die Gruppe in sich selbst transformirt werden.

Zu dieser rationalen Darstellung der Substitutionscoefficienten gelangt man auf folgende Art:

Man wähle m linear unabhängige inf. Transformationen $C_1(f)$ $C_2(f) \ldots$ $C_m(f)$ der Art aus, dass eine jede derselben regulär ist.

Die infinitesimale Transformation $C_i(f)$ „erzeugt" eine eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$. Ist die inf. Transformation $C_i(f)$ von der ersten Art, so sind die Coefficienten $b_{\lambda\mu}^{(i)}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe $B_i(u_i)$ durch die Differentialgleichungen

$$\frac{d\, b_{\lambda\mu}^{(i)}}{d\, u_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(i)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und die Anfangsbedingung $b_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_i = 0$ bestimmt. Die Grössen $b_{\lambda\mu}^{(i)}$ sind in diesem Fall ganze Funktionen von u_i.

Ist dagegen die inf. Transformation $C_i(f)$ von der zweiten Art, so sind die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}^{(i)}$ durch die Differentialgleichungen

$$u_i \frac{d\, b_{\lambda\mu}^{(i)}}{d\, u_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(i)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und die Anfangsbedingung $b_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_i = 1$ bestimmt. In diesem Fall sind die Substitutionscoefficienten wenigstens rationale Funktionen des Parameters u_i.

Setzt man nun die m eingliedrigen Gruppen $B_i(u_i)$ zu einer m-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1\, u_2 \ldots u_m) = B_1(u_1)\, B_2(u_2) \ldots B_m(u_m)$$

zusammen, so ist klar, dass die Coefficienten der allgemeinen Substitution dieser Gruppe A sich als rationale Funktionen der m Parameter $u_1\, u_2 \ldots u_m$ ergeben, und zwar gilt dies, wie auch immer die m inf. Transformationen $C_i(f)$ im übrigen gewählt sein mögen, wenn nur eine jede derselben regulär ist.

Setzt man zwei Substitutionen der Gruppe A

$$z_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((v))\, y_\mu \quad y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

zusammen, so erhält man dem Gruppenbegriff gemäss wieder eine Substitution der Gruppe.

Es muss also möglich sein m Funktionen $w_1\, w_2 \ldots w_m$ der Grössen $u_1\, u_2 \ldots u_m$; $v_1\, v_2 \ldots v_m$ der Art zu bestimmen, dass

$$a_{\lambda\mu}((w)) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((v))\, a_{\nu\mu}((u)) \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Die Grössen w sind im allgemeinen algebraische Funktionen der Grössen u und v, weil ja die Substitutionscoefficienten rationale Funktionen der Parameter sind. Aber es gilt der Satz:

Man kann die m inf. Transformationen $C_i(f)$, von deren Wahl die Wahl des Parametersystems abhängig gemacht worden ist, so wählen, dass die Grössen w rationale Funktionen der Grössen u und v werden.

Der Satz ist für die allgemeine Theorie der continuirlichen Gruppen insofern von Bedeutung, als er für eine sehr ausgedehnte Classe von Gruppentypen die Existenz einfach transitiver rationaler Gruppen nachweist. Es ist aber auch vom invariantentheoretischen Gesichtspunkt von Interesse, worauf aber hier nicht näher eingegangen werden soll.

Im Folgenden erlaube ich mir einen Beweis dieses Satzes vorzulegen.

Der Beweis wird in der Weise geführt, dass nachgewiesen wird: bei passender Wahl der inf. Transformationen $C_i(f)$ ergeben sich nicht nur die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe als rationale Funktionen der Parameter, sondern es sind auch umgekehrt die Parameter rational durch die Substitutionscoefficienten bestimmt. Ist dies bewiesen, so ist klar, dass von den vorhin besprochenen drei Grössensystemen u; v; w ein jedes durch die beiden anderen rational bestimmt ist.

Für den Beweis ist es zweckmässig die hier in Betracht kommenden Gruppen in drei Classen einzutheilen. In die erste Classe rechnen wir die Gruppen, deren inf. Transformationen sämmtlich regulär von der ersten Art sind; in die zweite Classe die Gruppen, deren inf. Transformationen sämmtlich regulär von der zweiten Art sind; in die dritte

dann n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$, die nicht alle gleich Null sind und die den Gleichungen

$$(a) \quad \sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Ich behaupte, ein derartiges System $c'_{\lambda\mu}$ kann nur existiren, wenn die Grösse ω gleich der Differenz zweier der Werthe r ist, für die die charakteristische Determinante $\Delta(r) = | c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r | \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$ verschwindet.

Den Beweis führen wir indirect: wir nehmen an, ω sei nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$, und beweisen, dass dann alle n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ verschwinden müssen.

Die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$ bezeichnen wir mit $r_1\, r_2 \ldots r_{n'}$, und die Exponenten der zum Wurzelfaktor $r_k - r$ gehörigen Elementartheiler mit $e_0^{(k)}\, e_1^{(k)} \ldots e_{l_k}^{(k)}$.

Wie ich in meiner Inauguraldissertation[1]) nachgewiesen habe, lassen sich n^2 Grössen $[g\, h\, \lambda]_k$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, [1\, h\, \mu]_k = r_k\, [1\, h\, \lambda]_k && \lambda = 1, 2, \ldots n \\ & && g = 2, 3, \ldots e_h^{(k)} \\ &\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, [g\, h\, \mu]_k = r_k\, [g\, h\, \lambda]_k + [g - 1\, h\, \lambda]_k && h = 0, 1, \ldots l_k \\ & && k = 1, 2, \ldots n' \end{aligned}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (a)

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu} \left(\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\nu\mu}\, [1\, h\, \mu]_k \right) = (r_k + \omega) \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, [1\, h\, \mu]_k$$
$$\lambda = 1, 2, \ldots n$$

Weil nach Voraussetzung die Determinante $\Delta(r)$ für $r = r_k + \omega$ nicht verschwindet, so folgt hieraus

1) Zur Theorie der linearen Substitutionen, Strassburg 1887.

und wählen die Zahl q so gross, dass $q\,n > m$ ist. Alsdann hat das System der Differentialgleichungen

$$(\gamma) \quad S_i(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^{(\sigma)}} x_\mu^{(\sigma)} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

$q\,n - m$ unabhängige Lösungen und jede Lösung ist gegenüber der Gruppe (β) invariant. Da aber die Gruppe (β) durch algebraische Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten definirt ist, so gibt es rationale Invarianten der Gruppe[1]) und zwar sind darunter $q\,n - m$ untereinander unabhängige.

Den Differentialgleichungen $S_i(f) = 0$ kommt also ein vollständiges System rationaler Lösungen zu. Es finden somit die in der Einleitung angegebenen Sätze auf die Gruppe (β) Anwendung.

Nun überzeugt man sich leicht, dass die inf. Transformation $S_i(f)$ regulär oder irregulär ist, je nachdem die inf. Transformation $C_i(f)$ regulär oder irregulär ist. Es gilt somit der Satz:

Findet sich unter den inf. Transformationen, die zu einer regulären Gruppe gehören, eine irreguläre Transformation $C(f)$, so gehören alle die regulären Transformationen, in die $C(f)$ zerlegt werden kann, der Gruppe an.

II.

Um später den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, schicke ich einige Hülfssätze aus der Theorie der bilinearen Formen voraus.

Wir stellen uns zunächst die folgende Frage: es seien n^2 Grössen $c_{\lambda\mu}$ gegeben, unter welchen Bedingungen gibt es

1) Christoffel Math. Annalen Bd. 19 S. 280.

$$C\,C' - C'\,C = \omega\,C'$$

repräsentiren. Aus dieser symbolischen Gleichung ergibt sich:

$$CC'^2 - C'^2C = (CC' - C'C)\,C' + C'\,(CC' - C'C) = 2\,\omega\,C'^2$$
$$CC'^3 - C'^3C = (CC'^2 - C'^2C)\,C' + C'^2(CC' - C'C) = 3\,\omega C'^3$$

und allgemein $CC'^h - C'^hC = h\,\omega\,C'^h$

Wählt man die Zahl h so gross, dass $h\,\omega$ nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $\varDelta(r) = 0$ ist, was offenbar immer möglich ist, wenn ω von Null verschieden ist — so müssen alle n^2 Elemente des durch das Symbol C'^h repräsentirten Systems verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn die zu dem System $c'_{\lambda\mu}$ gehörige charakteristische Determinante $\varDelta'(r)$ für keinen von Null verschiedenen Werth von r verschwindet, d. h. wenn das System der n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art ist.

Es gilt somit der

2. Hülfssatz:

Bestehen die n^2 Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\,c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\,c_{\nu\mu}) = \omega\,c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und ist die Constante ω von Null verschieden, so ist das System der n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art.

Die beiden ersten Hülfssätze haben sich auf reguläre Systeme erster Art bezogen, die beiden folgenden beziehen sich auf reguläre Systeme zweiter Art.

3. Hülfssatz:

Wenn die charakteristische Determinante

$$\varDelta(r) = |\, c_{\lambda\mu} - \tbinom{\lambda}{\mu}\, r\,| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

nur Elementartheiler erster Ordnung besitzt, so können die Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} [1\, h\, \mu]_k = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, .. n$$

Nun folgt aus (a) weiter

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu} \left(\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\nu\mu} [2\, h\, \mu]_k \right) = (r_k + w) \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} [2\, h\, \mu]_k$$
$$\lambda = 1, 2, .. n$$

und hieraus ergibt sich

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} [2\, h\, \mu]_k = 0 \qquad \lambda = 1, 2, .. n$$

Diese Schlussweise fortsetzend erkennt man, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} [g\, h\, \mu]_k = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, .. n$$

und alle n Werthsysteme der Indices g, h, k.

Da die Determinante der Grössen $[g\, h\, \mu]_k$ nicht verschwindet, so folgt hieraus $c'_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda, \mu = 1, 2, .. n$, w. z. b. w.

Aus dem eben Bewiesenen folgt der

1. Hülfssatz:

Ist das System der n^2 Grössen $c_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art, so können die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .. n$$

nur dann bestehen, wenn entweder ω oder alle n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.

Denn in diesem Fall verschwindet die charakteristische Determinante $\Delta(r)$ nur für $r = 0$.

Man kann das Gleichungssystem (a) in bekannter Weise durch die symbolische Gleichung

verschwindet, wenn $r_\varrho - r_\sigma - \omega = 0$ ist. Der genannte Ausdruck verschwindet also in allen Fällen und daraus folgt $c'_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda, \mu = 1, 2, .. n$, w. z. b. w.

4. Hülfssatz:

Es seien m Systeme von je n^2 Grössen vorgelegt:

$$c^{(1)}_{\lambda\mu}\, c^{(2)}_{\lambda\mu} \,..\, c^{(m)}_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .. n$$

Wir setzen voraus, die zu einem jeden Systeme gehörige charakteristische Determinante $\Delta_i(r)$ habe nur Elementartheiler erster Ordnung, und wir setzen weiter voraus, zwischen den Elementen von je zwei Grössensystemen bestehen die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c^{(i)}_{\lambda\nu}\, c^{(k)}_{\nu\mu} - c^{(k)}_{\lambda\nu}\, c^{(i)}_{\nu\mu}\right) = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, .. n \\ i, k = 1, 2, .. m \end{matrix}$$

Dann kann man ein System von n^2 Grössen $d^{(\sigma)}_\lambda$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c^{(i)}_{\lambda\mu}\, d^{(\sigma)}_\mu = r^{(i)}_\sigma\, d^{(\sigma)}_\lambda \qquad \begin{matrix} \lambda, \sigma = 1, 2, .. n \\ i = 1, 2, .. m \end{matrix}$$

Die n Grössen $r^{(i)}_1\, r^{(i)}_2 \,..\, r^{(i)}_n$ sind die Wurzeln der Gleichung $\Delta_i(r) = 0$, also ganze Zahlen, wenn das System der $c^{(i)}_{\lambda\mu}$ regulär von der zweiten Art ist.

Dass der eben ausgesprochene Satz gilt, wenn nur ein Grössensystem $c^{(i)}_{\lambda\mu}$ vorgelegt ist, ist bekannt. Um seine allgemeine Gültigkeit darzuthun, wollen wir annehmen, er gelte, solange die Anzahl der vorgelegten Grössensysteme kleiner als m ist, und beweisen, dass er dann auch noch für m Grössensysteme gilt. Wir nehmen also an, es gebe ein Grössensystem $t^{(\sigma)}_\lambda$ mit nicht verschwindender Determinante, das den Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c''_{\nu\mu} - c''_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c''_{\lambda\mu} + c'_{\lambda\mu}$$

nur dann bestehen, wenn alle n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$, unter denen beliebig viele einander gleiche vorkommen können, mit $r_1\, r_2 \ldots r_n$. Aus unserer Voraussetzung folgt: es gibt zwei Systeme von je n^2 Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ und $\delta_\lambda^{(\sigma)}$ $(\sigma, \lambda = 1, 2 \ldots n)$ mit nicht verschwindender Determinante, die den folgenden Gleichungen genügen:

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, d_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma\, d_\lambda^{(\sigma)}$$

$$\lambda, \sigma = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\mu\lambda}\, \delta_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma\, \delta_\lambda^{(\sigma)}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen leitet man aus dem vorgelegten Gleichungssystem das Folgende ab:

$$(r_\varrho - r_\sigma - \omega) \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)} = 0$$

$$(r_\varrho - r_\sigma - \omega) \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c''_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)}$$

$$\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots n$$

Die erste Gleichung zeigt, dass der Ausdruck

$$\sum_\lambda \sum_\mu c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)}$$

verschwindet, wenn $r_\varrho - r_\sigma - \omega$ von Null verschieden ist. Die zweite Gleichung zeigt, dass dieser Ausdruck auch dann

verschwindet, wenn $r_\varrho - r_\sigma - \omega = 0$ ist. Der genannte Ausdruck verschwindet also in allen Fällen und daraus folgt $c'_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda, \mu = 1, 2, .. n$, w. z. b. w.

4. Hülfssatz:

Es seien m Systeme von je n^2 Grössen vorgelegt:

$$c_{\lambda\mu}^{(1)}\, c_{\lambda\mu}^{(2)} \,..\, c_{\lambda\mu}^{(m)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .. n$$

Wir setzen voraus, die zu einem jeden Systeme gehörige charakteristische Determinante $\Delta_i(r)$ habe nur Elementartheiler erster Ordnung, und wir setzen weiter voraus, zwischen den Elementen von je zwei Grössensystemen bestehen die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)}\, c_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0 \qquad \begin{array}{c} \lambda, \mu = 1, 2, .. n \\ i, k = 1, 2, .. m \end{array}$$

Dann kann man ein System von n^2 Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)}\, d_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma^{(i)}\, d_\lambda^{(\sigma)} \qquad \begin{array}{c} \lambda, \sigma = 1, 2, .. n \\ i = 1, 2, .. m \end{array}$$

Die n Grössen $r_1^{(i)}\, r_2^{(i)} .. r_n^{(i)}$ sind die Wurzeln der Gleichung $\Delta_i(r) = 0$, also ganze Zahlen, wenn das System der $c_{\lambda\mu}^{(i)}$ regulär von der zweiten Art ist.

Dass der eben ausgesprochene Satz gilt, wenn nur ein Grössensystem $c_{\lambda\mu}^{(i)}$ vorgelegt ist, ist bekannt. Um seine allgemeine Gültigkeit darzuthun, wollen wir annehmen, er gelte, solange die Anzahl der vorgelegten Grössensysteme kleiner als m ist, und beweisen, dass er dann auch noch für m Grössensysteme gilt. Wir nehmen also an, es gebe ein Grössensystem $t_\lambda^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante, das den Gleichungen

$$(T) \quad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} t_{\mu}^{(\sigma)} = r_{\sigma}^{(i)} t_{\lambda}^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \; i = 1, 2, \ldots m-1$$

genügt. Weil nach Voraussetzung die Determinante der $t_{\lambda}^{(\sigma)}$ nicht verschwindet, so kann man die Gleichungen ansetzen

$$(\alpha) \quad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(m)} t_{\mu}^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\sigma\nu} t_{\lambda}^{(\nu)} \qquad \lambda, \sigma = 1, 2, \ldots n$$

Nach dem bekannten Theorem des H. Weinstrass stimmen die charakteristischen Determinanten.

$$\Delta_m(r) = \left| c_{\lambda\mu}^{(m)} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \text{ und } \Delta_m'(r) = \left| \alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right|$$
$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

in ihren Elementartheilern überein.

Nun folgt aus den Gleichungen, von denen wir ausgegangen sind bei Benützung der Gleichungen (T) und (α)

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)} c_{\nu\mu}^{(m)} - c_{\lambda\nu}^{(m)} c_{\nu\mu}^{(i)}\right) t_{\mu}^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(r_{\nu}^{(i)} - r_{\sigma}^{(i)}\right) \alpha_{\sigma\nu} t_{\lambda}^{(\nu)} = 0$$
$$\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots n; \; i = 1, 2, \ldots m-1$$

und hieraus ergibt sich $\alpha_{\sigma\nu} = 0$, wenn nicht

$$r_{\nu}^{(i)} = r_{\sigma}^{(i)} \text{ für } i = 1, 2, \ldots m-1$$

Ist nun für keinen Index $\nu > 1$ gleichzeitig $r_{\nu}^{(i)} = r_{1}^{(i)}$ für $i = 1, 2, \ldots m-1$, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu}^{(m)} t_{\mu}^{(i)} = \alpha_{11} t_{\lambda}^{(1)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

und wir genügen den zu beweisenden Gleichungen, wenn wir $d_{\lambda}^{1)} = t_{\lambda}^{(1)}$ und $r_{1}^{(m)} = \alpha_{11}$ setzen.

Nehmen wir nunmehr an, es sei

$$r_{1}^{(i)} = r_{2}^{(i)} \ldots = r_{h}^{(i)} \qquad i = 1, 2, \ldots m-1$$

dagegen sei für keinen Index $\nu > h$ gleichzeitig

$$r_\nu^{(i)} = r_1^{(i)} \qquad i = 1, 2, \ldots m-1$$

Von den Elementen der Determinante

$$\Delta'_m(r) = \left| \alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

verschwinden alle, die den ersten h Zeiten, aber nicht gleichzeitig den ersten h Spalten angehören. Beachtet man, dass die Determinante $\Delta'_m(r)$ ebenso wie die Determinante $\Delta_m(r)$ nur Elementartheile erster Ordnung besitzt, so überzeugt man sich leicht, dass auch die charakteristische Determinante des Systems h^{ten} Grades $\alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots h$ nur Elementartheiler erster Ordnung hat, und daraus folgt: man kann ein System von h^2 Grössen $\beta_{\varrho\sigma}$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\sigma=1}^{h} \beta_{\varrho\sigma} \alpha_{\sigma\nu} = r_\varrho^{(m)} \beta_{\varrho\nu} \qquad \varrho, \nu = 1, 2, \ldots h$$

Setzt man dann

$$\sum_{\nu=1}^{h} \beta_{\varrho\nu} t_\lambda^{(\nu)} = d_\lambda^{(\varrho)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \; \varrho = 1, 2, \ldots h$$

so ergibt sich aus den Gleichungen (α)

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(m)} d_\mu^{(\varrho)} = r_\varrho^{(m)} d_\lambda^{(\varrho)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \quad \varrho = 1, 2, \ldots h$$

Damit sind die ersten h der zu beweisenden Gleichungen als richtig erwiesen. Der Beweis der übrigen ergibt sich auf analoge Weise.

III.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zunächst zu den Gruppen der zweiten Classe (s. Einleitung, Schluss).

Wir nehmen also an, eine jede inf. Transformation, die der vorgelegten m-gliedrigen Gruppe A angehört, sei regulär

von der zweiten Art. Zwischen den Coefficienten von m linear unabhängigen inf. Transformationen der Gruppe A

$$C_i(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

bestehen Gleichungen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)} c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)} c_{\nu\mu}^{(i)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} c_{\lambda\mu}^{(j)}$$
$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n; \quad i, k = 1, 2, \ldots m)$$

Ich behaupte, die Constanten ε_j^{ik} müssen alle gleich Null sein. Wäre nämlich z. B. eine der m^2 Grössen ε^{1k} von Null verschieden, so müsste die Determinante $E(r) = |\, \varepsilon_j^{1k} - \binom{k}{j} r \,|$ $k, j = 1, 2, \ldots m$ entweder wenigstens für einen von Null verschiedenen Werth von r verschwinden, oder sie müsste, wenn sie durch r^m theilbar ist, wenigstens einen Elementartheiler von höherer als der ersten Ordnung haben.

Tritt der letztere Fall ein, so kann man zwei Werthsysteme, deren Elemente nicht alle verschwinden, $e_1\, e_1 \ldots e_m$ und $e_1'\, e_2' \ldots e_m'$ so bestimmen, dass

$$\sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h} e_h = 0 \;\text{ und }\; \sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h} e_h' = e_j \qquad (j = 1, 2, \ldots m)$$

Setzt man nun

$$\sum_{i=1}^{m} e_i c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} e_i' c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu}' \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

so bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(1)} k_{\nu\mu} - k_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}^{(1)}\right) = 0 \\ &\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(1)} k_{\nu\mu}' - k_{\lambda\nu}' c_{\nu\mu}^{(1)}\right) = k_{\lambda\mu} \end{aligned}\right\} \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Aber diese Gleichungen können nach Hülfssatz (3) nur dann statt haben, wenn alle n^2 Grössen $k_{\lambda\mu}$ verschwinden.

$$r_1^{(i)} \quad r_2^{(i)} \, .. \quad r_n^{(i)}$$

einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Wären nämlich diese n Zahlen durch die Zahl a theilbar, so hätte man nur die inf. Transformation $C_i(f)$ durch $\frac{1}{a} C_i(f)$ zu ersetzen.

Um nun unsere Behauptung zu beweisen, gehen wir von der Annahme aus, dass nicht alle Unterdeterminanten $h-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h-1$ ersten Zeilen des Systems (R) angehören, einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor besitzen. Diese Voraussetzung ist, wenn nicht für grössere h, so doch sicher für $h=2$ erfüllt. Es sei sodann a der grösste gemeinschaftliche Divisor aller der Unterdeterminanten h^{ten} Grades, deren Elemente den h ersten Zeilen von (R) angehören. Unter den Unterdeterminanten $h-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h-1$ ersten Zeilen von (R) angehören, ist mindestens eine nicht durch a theilbar. Es sei dies die aus den Elementen der $h-1$ ersten Spalten gebildete Determinante D_{h-1}. Unter den Unterdeterminanten h^{ten} Grades, deren Elemente den h ersten Zeilen von (R) angehören und die alle Elemente von D_{h-1} enthalten, hat mindestens eine einen von Null verschiedenen Werth. Es sei dies die aus den Elementen der h ersten Spalten gebildete Determinante D_h. Es sei ferner b der grösste gemeinschaftliche Divisor von D_{h-1} und a, so dass jedenfalls $b < a$ ist. Endlich sei t eine Wurzel der Congruenz $t\, R_{h-1} \equiv b$ mod a.

Wir lassen nun an Stelle der inf. Transformation $C_h(f)$ die Transformation

$$K(f) = \frac{1}{a}\left(t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(1)}} C_1(f) + t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(2)}} C_2(f) \, .. \right.$$
$$\left. + \, t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(h-1)}} C_{h-1}(f) + b\, C_h(f)\right)$$

treten. Dementsprechend tritt an Stelle des Zahlensystems (R) ein Zahlensystem (R'), das sich von (R) nur in den

Führt man an Stelle der inf. Transformationen $C_i(f)$ m andere linear unabhängige inf. Transformationen

$$K_i(f) = \sum_{h=1}^{m} q_{ih}\, C_h(f) \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

ein, so treten in den Gleichungen (T) an Stelle der Grössen $r_\sigma^{(i)}$ die Grössen

$$\varrho_\sigma^{(i)} = \sum_{h=1}^{m} q_{ih}\, r_\sigma^{(h)}$$

während die Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ unverändert bleiben.

Ich behaupte nun: man kann die verfügbaren Grössen q_{ih} so wählen, dass

1. auch die Grössen $\varrho_\sigma^{(i)}$ — ebenso wie die Grössen $r_\sigma^{(i)}$ — ganze Zahlen sind, und dass

2. die aus m Spalten des Systems

$$\begin{matrix} \varrho_1^{(1)} & \varrho_2^{(1)} & \ldots & \varrho_n^{(1)} \\ \varrho_1^{(2)} & \varrho_2^{(2)} & \ldots & \varrho_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_1^{(m)} & \varrho_2^{(m)} & \ldots & \varrho_n^{(m)} \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten m^{ten} Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Zum Beweise ist zunächst zu bemerken: weil nach Voraussetzung die m inf. Transformationen $C_i(f)$ linear unabhängig sind, so können nicht alle Determinanten m^{ten} Grades, die aus m Spalten des Systems

$$(R) \qquad \begin{matrix} r_1^{(1)} & r_2^{(1)} & \ldots & r_n^{(1)} \\ r_1^{(2)} & r_2^{(2)} & \ldots & r_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^{(m)} & r_2^{(m)} & \ldots & r_n^{(m)} \end{matrix}$$

gebildet sind, verschwinden. Wir können ferner voraussetzen, dass nicht alle n zu einer inf. Transformation $C_i(f)$ gehörigen Grössen

$$r_1^{(i)} \quad r_2^{(i)} \ldots \quad r_n^{(i)}$$

einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Wären nämlich diese n Zahlen durch die Zahl a theilbar, so hätte man nur die inf. Transformation $C_i(f)$ durch $\frac{1}{a} C_i(f)$ zu ersetzen.

Um nun unsere Behauptung zu beweisen, gehen wir von der Annahme aus, dass nicht alle Unterdeterminanten $h-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h-1$ ersten Zeilen des Systems (R) angehören, einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor besitzen. Diese Voraussetzung ist, wenn nicht für grössere h, so doch sicher für $h = 2$ erfüllt. Es sei sodann a der grösste gemeinschaftliche Divisor aller der Unterdeterminanten h^{ten} Grades, deren Elemente den h ersten Zeilen von (R) angehören. Unter den Unterdeterminanten $h-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h-1$ ersten Zeilen von (R) angehören, ist mindestens eine nicht durch a theilbar. Es sei dies die aus den Elementen der $h-1$ ersten Spalten gebildete Determinante D_{h-1}. Unter den Unterdeterminanten h^{ten} Grades, deren Elemente den h ersten Zeilen von (R) angehören und die alle Elemente von D_{h-1} enthalten, hat mindestens eine einen von Null verschiedenen Werth. Es sei dies die aus den Elementen der h ersten Spalten gebildete Determinante D_h. Es sei ferner b der grösste gemeinschaftliche Divisor von D_{h-1} und a, so dass jedenfalls $b < a$ ist. Endlich sei t eine Wurzel der Congruenz $t\, R_{h-1} \equiv b \mod a$.

Wir lassen nun an Stelle der inf. Transformation $C_h(f)$ die Transformation

$$K(f) = \frac{1}{a}\left(t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(1)}} C_1(f) + t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(2)}} C_2(f) \ldots \right.$$
$$\left. + t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(h-1)}} C_{h-1}(f) + b\, C_h(f)\right)$$

treten. Dementsprechend tritt an Stelle des Zahlensystems (R) ein Zahlensystem (R'), das sich von (R) nur in den

Elementen der h^{ten} Zeile unterscheidet, indem die Zahlen $r_\sigma^{(h)}$ durch die Zahlen

$$\varrho_\sigma = \frac{1}{a}\left(t\,\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(1)}}\,r_\sigma^{(1)} + t\,\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(2)}}\,r_\sigma^{(2)} \,.\,. \right.$$
$$\left. + t\,\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(h-1)}}\,r_\sigma^{(h-1)} + b\,r_\sigma^{(h)}\right)$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots n)$$

ersetzt sind. Die Grössen ϱ_σ sind ganze Zahlen, denn der Zähler von ϱ_σ ist nach dem Modul a dem t-fachen einer der Unterdeterminanten h^{ten} Grades congruent, die aus den Elementen der h ersten Zeilen des Systems (R) gebildet sind, er ist also durch a theilbar.

Man überzeugt sich nun leicht, dass b der grösste gemeinschaftliche Divisor der Unterdeterminanten h^{ten} Grades ist, die aus den Elementen der h ersten Zeilen des Systems (R') gebildet sind. An Stelle des gemeinschaftlichen Divisors a ist somit ein kleinerer gemeinschaftlicher Divisor b getreten.

Es ist nun klar, dass bei wiederholter Anwendung des eben durchgeführten Verfahrens an Stelle des Systems (R) ein System (R_1) von der Beschaffenheit tritt, dass die Unterdeterminanten h^{ten} Grades, die aus den Elementen der h ersten Zeilen gebildet sind, keinen gemeinschaftlichen Divisor mehr besitzen. Aus diesem System (R_1) leitet man dann in analoger Weise ein System (R_2) von der Beschaffenheit ab, dass auch die Unterdeterminanten $h+1^{\text{ten}}$ Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor mehr besitzen u. s. w.

Wir wollen nunmehr voraussetzen, die inf. Transformation $C_1(f)$ $C_2(f)\,.\,.\;C_m(f)$ seien von Anfang an so gewählt, dass die aus m Spalten des Systems (R) gebildeten Determinanten m^{ten} Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor besitzen.

Unter dieser Voraussetzung bezeichne ich die genannten

Demnach sind die Logarithmen der Quotienten $\frac{v_h}{u_h}$ Multipla von $2\pi i$ und es ist folglich $v_1 = u_1 \;\; v_2 = u_2 \, . \, . \;\; v_m = u_m$ w. z. b. w.

IV.

Die beiden Theile unseres Beweises, die sich auf Gruppen der ersten und der dritten Classe (s. Einleitung) beziehen, beruhen auf einem gemeinschaftlichen Grundgedanken. Ich beginne mit der Darlegung dieses Beweisprincips.

Es seien m reguläre, linear unabhängige, inf. Transformationen

$$C_1(f) \;\; C_2(f) \, . \, . \;\; C_m(f)$$

vorgelegt, die eine m-gliedrige Gruppe erzeugen. Wir bestimmen die zu einer jeden inf. Transformation $C_i(f)$ gehörige eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$ (s. Einleitung) und setzen dann diese m eingliedrigen Gruppen zu der m-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1 \, u_2 \, ., \, u_m) = B_1(u_1) \, B_2(u_2) \, . \, . \, B_m(u_m)$$

zusammen.

Bezüglich der inf. Transformationen $C_i(f)$ machen wir nun die Voraussetzungen:

1. es sollen die q ersten von denselben für sich eine Gruppe bestimmen und ebenso sollen die $m-q$ letzten für sich eine Gruppe bestimmen.

Alsdann werden die q ersten unter den eingliedrigen Gruppen $B_i(u_i)$ sich zu einer q-gliedrigen Gruppe

$$A'(u_1 \, u_2 \, . \, . \, u_q) = B_1(u_1) \, B_2(u_2) \, . \, . \, B_q(u_q)$$

zusammensetzen und ebenso werden sich die $m-q$ letzten zu einer $m-q$-gliedrigen Gruppe

$$A''(u_{q+1} \, u_{q+2} \, . \, . \, u_m) = B_{q+1}(u_{q+1}) \, B_{q+2}(u_{q+2}) \, . \, . \, B_m(u_m)$$

zusammensetzen.

Wir nehmen nun an, es sei bereits bewiesen:

entspreche dasselbe Werthsystem der Grössen $a_{\lambda\mu}$, und wir beweisen, dass dann nothwendig

$$v_1 = u_1 \quad v_2 = u_2 \, . \, . \quad v_m = u_m$$

Aus unserer Voraussetzung ergibt sich

$$\left(\frac{v_1}{u_1}\right)^{r_\sigma^{(1)}} \left(\frac{v_2}{u_2}\right)^{r_\sigma^{(2)}} \, . \, . \left(\frac{v_m}{u_m}\right)^{r_\sigma^{(m)}} = 1 \qquad \sigma = 1, 2, \, . \, . \, n$$

und hieraus folgt, dass eine jede von den n Summen

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{m} r_\sigma^{(h)} \log \frac{v_h}{u_h}$$

eine ganze Zahl ist.

Wir setzen nun, unter N_σ eine ganze Zahl verstehend, die n Gleichungen

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{m} r_\sigma^{(h)} \log \frac{v_h}{u_h} = N_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \, . \, . \, n)$$

an und bilden von denselben alle die Combinationen zu m, die m von einander unabhängige Gleichungen umfassen. Die Auflösung eines dieser Gleichungssysteme ergibt die m Grössen $\frac{1}{2\pi i} \log \frac{v_h}{u_h}$ als Quotienten, deren Zähler von den Zahlen N_σ abhängige, nicht näher bestimmte ganze Zahlen sind, und deren gemeinschaftlicher Nenner — die Auflösungsdeterminante — eine von den Determinanten m^{ten} Grades ist, die aus m Spalten des Systems (R) gebildet sind, und es ist klar, dass jede derartige Determinante, die nicht verschwindet, als Auflösungsdeterminante zu einem unserer Systeme von m Gleichungen gehört. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner der m Brüche $\frac{1}{2\pi i} \log \frac{v_h}{u_h}$ muss daher gemeinschaftlicher Divisor aller der genannten Determinanten sein: er ist also $= 1$.

verfügt werden kann, so kann einem Werthsystem der Substitutionscoefficienten nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen der Parameter entsprechen. Um die eben aufgestellte Behauptung zu beweisen, genügt es also zu zeigen:

Wenn einem Werthsysteme der Substitutionscoefficienten zwei verschiedene Werthsysteme der Parameter entsprechen, so entsprechen ihm unendlich viele Werthsysteme der Parameter.

Nehmen wir, um diesen Nachweis zu führen, an, den beiden Parametersystemen

$$u_1\, u_2 \,.\,.\, u_m \text{ und } v_1\, v_2 \,.\,.\, v_m$$

entspreche dieselbe Substitution der Gruppe A. Es sei also

$$(G) \quad A\,(u_1\, u_2 \,.\,.\, u_m) = A\,(v_1\, v_2 \,.\,.\, v_m)$$

ohne dass gleichzeitig die m Gleichungen $v_1 = u_1 \;\; v_2 = u_2 \,.\,.$ bestehen. Da allgemein $A = A'\,A''$ so kann man die symbolische Gleichung (G) durch die folgende ersetzen:

$$(G') \quad \begin{aligned} &A'\,(u_1\, u_2 \,.\,.\, u_q)\, A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,.\,.\, u_m) \\ &= A'\,(v_1\, v_2 \,.\,.\, v_q)\, A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,.\,.\, v_m) \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$(H) \quad \begin{aligned} &[A'\,(v_1\, v_2 \,.\,.\, v_q)]^{-1}\, A'\,(u_1\, u_2 \,.\,.\, u_q)\, A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,.\,.\, u_m) \\ &\qquad [A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,.\,.\, v_m)]^{-1} = 1 \end{aligned}$$

wo in üblicher Weise die identische Substitution mit 1 bezeichnet ist.

Wegen des Gruppencharakters der Substitutionen A' und A'' kann man Funktionen $w_1\, w_2 \,.\,.\, w_q$ von $u_1\, u_2 \,.\,.\, u_q$ und $v_1\, v_2 \,.\,.\, v_q$ und Funktionen $w_{q+1}\, w_{q+2} \,.\,.\, w_m$ von u_{q+1} $u_{q+2} \,.\,.\, u_m$ und $v_{q+1}\, v_{q+2} \,.\,.\, v_m$ derart bestimmen, dass

$$(J) \quad [A'\,(v_1\, v_2 \,.\,.\, v_q)]^{-1}\, A'\,(u_1\, u_2 \,.\,.\, u_q) = A'\,(w_1\, w_2 \,.\,.\, w_q)$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} &A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,.\,.\, u_m)\,[A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,.\,.\, v_m)]^{-1} \\ &= A''\,(w_{q+1}\, w_{q+2} \,.\,.\, w_m) \end{aligned}$$

Nach unserer zweiten Voraussetzung hängen diese Funktionen w rational von ihren Argumenten ab.

2. Die Parameter $u_1 u_2 .. u_q$, von denen die Coefficienten $a'_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe A' abhängen, lassen sich als rationale Funktionen der Coefficienten $a'_{\lambda\mu}$ darstellen und ebenso sind die Parameter $u_{q+1} u_{q+2} .. u_m$, von denen die Coefficienten $a''_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe A'' abhängen, rationale Funktionen der Coefficienten $a''_{\lambda\mu}$.

Bezüglich der Gruppe A'' machen wir noch die weitere Voraussetzung:

3. Unter den Potenzen einer beliebigen Substitution S der Gruppe A'' soll die identische Substitution nur dann vorkommen, wenn S selbst die identische Substitution ist, wenn also die der Substitution entsprechenden Parameter die Werthe haben, die in der Einleitung als Anfangswerthe der Parameter bezeichnet worden sind.

Aus dieser Voraussetzung ergibt sich in bekannter Weise, dass alle Potenzen einer Substitution S der Gruppe A'' unter einander verschieden sind.

Geht also die Substitution S^h aus der allgemeinen Substitution der Gruppe dadurch hervor, dass man den verfügbaren Parametern $u_{q+1} u_{q+2} .. u_m$ die Werthe $w_{q+1}^{(h)} w_{q+2}^{(h)} ..$ $w_m^{(h)}$ ertheilt, so sind diese Werthsysteme $w_{q+1}^{(h)} w_{q+2}^{(h)} ..$, die den verschiedenen Potenzen von S entsprechen, alle unter einander verschieden.

Ich behaupte nun, die eingeführten Voraussetzungen reichen für den Beweis hin, dass sich die Parameter $u_1 u_2 .. u_m$ rational durch die Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe A darstellen lassen.

Zum Beweis ist zunächst zu bemerken:

Weil die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ rationale Funktionen der Parameter $u_1 u_2 .. u_m$ sind, so hängen umgekehrt die Parameter algebraisch von den Substitutionscoefficienten ab und weil die Gruppe A m-gliedrig ist, also über m der Substitutionscoefficienten durch geeignete Wahl der Parameter

verfügt werden kann, so kann einem Werthsystem der Substitutionscoefficienten nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen der Parameter entsprechen. Um die eben aufgestellte Behauptung zu beweisen, genügt es also zu zeigen:

Wenn einem Werthsysteme der Substitutionscoefficienten zwei verschiedene Werthsysteme der Parameter entsprechen, so entsprechen ihm unendlich viele Werthsysteme der Parameter.

Nehmen wir, um diesen Nachweis zu führen, an, den beiden Parametersystemen

$$u_1 \, u_2 \, .. \, u_m \text{ und } v_1 \, v_2 \, .. \, v_m$$

entspreche dieselbe Substitution der Gruppe A. Es sei also

$$(G) \quad A\,(u_1 \, u_2 \, .. \, u_m) = A\,(v_1 \, v_2 \, .. \, v_m)$$

ohne dass gleichzeitig die m Gleichungen $v_1 = u_1 \;\; v_2 = u_2 \, ..$ bestehen. Da allgemein $A = A' \, A''$ so kann man die symbolische Gleichung (G) durch die folgende ersetzen:

$$(G') \quad \begin{aligned} & A'\,(u_1 \, u_2 \, .. \, u_q)\, A''\,(u_{q+1} \, u_{q+2} \, .. \, u_m) \\ & = A'\,(v_1 \, v_2 \, .. \, v_q)\, A''\,(v_{q+1} \, v_{q+2} \, .. \, v_m) \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$(H) \quad \begin{aligned} & [A'\,(v_1 \, v_2 \, .. \, v_q)]^{-1} \, A'\,(u_1 \, u_2 \, .. \, u_q)\, A''\,(u_{q+1} \, u_{q+2} \, .. \, u_m) \\ & \qquad [A''\,(v_{q+1} \, v_{q+2} \, .. \, v_m)]^{-1} = 1 \end{aligned}$$

wo in üblicher Weise die identische Substitution mit 1 bezeichnet ist.

Wegen des Gruppencharakters der Substitutionen A' und A'' kann man Funktionen $w_1 \, w_2 \, .. \, w_q$ von $u_1 \, u_2 \, .. \, u_q$ und $v_1 \, v_2 \, .. \, v_q$ und Funktionen $w_{q+1} \, w_{q+2} \, .. \, w_m$ von u_{q+1} $u_{q+2} \, .. \, u_m$ und $v_{q+1} \, v_{q+2} \, .. \, v_m$ derart bestimmen, dass

$$(J) \quad [A'\,(v_1 \, v_2 \, .. \, v_q)]^{-1} \, A'\,(u_1 \, u_2 \, .. \, u_q) = A'\,(w_1 \, w_2 \, .. \, w_q)$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} & A''\,(u_{q+1} \, u_{q+2} \, .. \, u_m)\,[A''\,(v_{q+1} \, v_{q+2} \, .. \, v_m)]^{-1} \\ & = A''\,(w_{q+1} \, w_{q+2} \, .. \, w_m) \end{aligned}$$

Nach unserer zweiten Voraussetzung hängen diese Funktionen w rational von ihren Argumenten ab.

Setzen wir sodann für beliebige positive und negative Exponenten h

$$(K)\quad \begin{aligned}[A'(w_1\, w_2\, .\, .\, w_q)]^h &= A'(w_1^{(h)}\, w_2^{(h)}\, .\, .\, w_q^{(h)}) \\ [A''(w_{q+1}\, w_{q+2}\, .\, .\, w_m)]^h &= A''(w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)}\, .\, .\, w_m^{(h)})\end{aligned}$$

so sind auch die Grössen $w_1^{(h)}\, w_2^{(h)}\, .\, .\, w_q^{(h)}$ rationale Funktionen von $u_1\, u_2\, .\, .\, u_q$ und $v_1\, v_2 .\, .\, v_q$ und die Grössen $w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)}\, .\, .\, w_m^{(h)}$ rationale Funktionen von $u_{q+1}\, u_{q+2}\, .\, .\, u_m$ und $v_{q+1}\, v_{q+2}\, .\, .\, v_m$.

Die Substitution

$$A''(w_{q+1}\, w_{q+2}\, .\, .\, w_m)$$

ist von der identischen Substitution verschieden.

Denn andernfalls wäre

$$A''(u_{q+1}\, u_{q+2}\, .\, .\, u_m) = A''(v_{q+1}\, v_{q+2}\, .\, .\, v_m)$$

und nach unserer zweiten Voraussetzung folgt hieraus $v_{q+1} = u_{q+1}$ $v_{q+2} = u_{q+2}\, .\, .\, v_m = u_m$.

Wegen (G') wäre nun auch

$$A'(u_1\, u_2\, .\, .\, u_q) = A'(v_1\, v_2\, .\, .\, v_q)$$

also auf Grund der zweiten Voraussetzung auch

$$v_1 = u_1\;\; v_2 = u_2\, .\, .\;\; v_q = u_q$$

im Widerspruch mit der Annahme, von der wir ausgegangen sind.

Aus unserer dritten Voraussetzung ergibt sich nunmehr, dass die Werthsysteme

$$w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)}\, .\, .\, w_m^{(h)}$$

alle untereinander verschieden sind.

Nun folgt aus (H) bei Berücksichtigung von (J) und (K)

$$A'(w_1\, w_2\, .\, .\, w_q)\, A''(w_{q+1}\, w_{q+2}\, .\, .\, w_m) = 1$$

$$\begin{aligned}&[A'(w_1\, w_2\, .\, .\, w_q)]^h\, [A''(w_{q+1}\, w_{q+2}\, .\, .\, w_m)]^h \\ &= A'(w_1^{(h)}\, w_2^{(h)}\, .\, .\, w_q^{(h)})\, A''(w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)}\, .\, .\, w_m^{(h)}) \\ &= A(w_1^{(h)}\, w_2^{(h)}\, .\, .\, w_m^{(h)}) = 1\end{aligned}$$

für beliebige positive und negative Exponenten h.

jenigen Gruppen gehören, die H. Killing als Gruppen vom Rang Null bezeichnet hat.

Für diese Gruppen gilt der Satz:[1])

Man kann die inf. Transformationen $C_i(f)$ so wählen, dass sie den Relationen

$$(J) \quad C_i\, C_k\,(f) - C_k\, C_i\,(f) = \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j^{ik}\, C_j(f)$$

$$(k = 1, 2, .. i - 1; \quad i = 2, 3, .. m)$$

genügen.

Das charakteristische an den Relationen (J) ist: sie haben zur Folge, dass die i inf. Transformationen

$$C_1(f)\; C_2(f) \,..\; C_i(f)$$

für sich eine i-gliedrige Gruppe bestimmen, und zwar gilt dies für $i = 1, 2, .. m$.

Ein System von m unter einander linear unabhängigen Transformationen, das den Relationen (J) genügt, bezeichne ich als kanonisches System.

Um nun die m-gliedrige Gruppe A zu bestimmen, die von den m inf. Transformationen $C_i(f)$ erzeugt ist, bestimmen wir zunächst die zu einer jeden inf. Transformation $C_i(f)$ gehörige eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$ und setzen dann diese m eingliedrigen Gruppen zu der m-gliedrigen Gruppe

$$A\,(u_1\, u_2 \,..\, u_m) = B_1\,(u_1)\; B_2\,(u_2) \,..\; B_m\,(u_m)$$

zusammen. Da die inf. Transformationen

$$C_1(f)\; C_2(f) \,..\; C_{m-1}(f)$$

für sich eine Gruppe bestimmen, so setzen sich die $m-1$ eingliedrigen Gruppen

$$B_1\,(u_1)\; B_2\,(u_2) \,..\; B_{m-1}\,(u_{m-1})$$

1) Dissertation von Umlauf: Ueber die Zusammensetzung der Gruppen vom Rang Null. Leipzig 1891. Vergl. auch Engel, Leipziger Berichte 1887 S. 95.

Es ist somit

$$[B(u)]^h = B(hu)$$

Die identische Substitution entspricht dem Parameterwerth $u = 0$. Daraus folgt

2. In der Reihe der Potenzen der Substitution $B(u)$ kann die identische Substitution nur dann auftreten, wenn $u = 0$, also schon die Substitution $B(u)$ selbst die identische Substitution ist.

Es sei nun eine m-gliedrige Gruppe der ersten Classe vorgelegt.

$$C_1(f) \;\; C_2(f) \,.\,. \; C_m(f)$$

seien untereinander linear unabhängig, im Uebrigen aber beliebige inf. Transformationen derselben. Sie sind alle regulär von der ersten Art, weil die Gruppe nach ihrer Definition keine anderen inf. Transformationen enthält.

Zwischen diesen m inf. Transformationen bestehen Relationen der Form

$$C_i\, C_k(f) - C_k\, C_i(f) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik}\, C_j(f) \qquad i, k = 1, 2, \,.\,.\, m$$

Ich behaupte, die charakteristische Determinante

$$\left| \varepsilon_j^{ik} - \binom{k}{j} r \right| \qquad k, j = 1, 2, \,.\,.\, m$$

kann für keinen von Null verschiedenen Werth von r verschwinden.

Nehmen wir nämlich an, diese Determinante verschwinde für den von Null verschiedenen Werth $r = \omega$, dann kann man eine lineare Combination $K(f)$ der inf. Transformationen $C_1(f)$ $C_2(f)$ .. $C_m(f)$ derart bestimmen, dass

$$C_i\, K(f) - K\, C_i(f) = \omega\, C_i(f)$$

Aber dies ist nach dem ersten Hülfssatz des Art. II unmöglich, weil $C_i(f)$ regulär von der ersten Art ist.

Daraus folgt, dass die Gruppen erster Classe zu den-

inf. Transformationen der Gruppe so wählen, dass 1) jede derselben regulär von der ersten Art ist, und dass 2) die Zusammensetzung der Gruppe durch Gleichungen der Form (J) bestimmt ist.

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass umgekehrt diese beiden Eigenschaften eine Gruppe erster Classe — d. h. eine Gruppe, die nur reguläre inf. Transformationen erster Art enthält — charakterisiren. Ich unterlasse diesen Nachweis, weil er für das Folgende nicht nothwendig ist, und beschränke mich auf die Bemerkung, dass die beiden eben angeführten Eigenschaften für den Beweis hinreichen, dass sich die Parameter rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen, und dass keine Potenz einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe, die identische Substitution ergeben kann. Es ergibt sich dies unmittelbar aus dem Gang des gegebenen Beweises.

Im Folgenden wenden wir die Bezeichnung „Gruppe erster Classe" auf alle die Gruppen an, die die beiden eben genannten charakteristischen Eigenschaften besitzen.

VI.

Wir gehen nunmehr zu den Gruppen der dritten Classe über, die reguläre inf. Transformationen sowohl von der ersten als von der zweiten Art enthalten.

Es sei $C_1(f)$ eine beliebige in der Gruppe enthaltene reguläre inf. Transformation zweiter Art.

Unter den in der Gruppe enthaltenen inf. Transformationen $K(f)$, die mit $C_1(f)$ vertauschbar sind, d. h. der Relation $C_1 K(f) - K C_1(f) = 0$ genügen, wählen wir, — wenn es solche gibt — eine reguläre Transformation zweiter Art aus und bezeichnen sie mit $C_2(f)$. Gibt es weitere reguläre Transformationen zweiter Art, die mit $C_1(f)$ und

zu einer $m-1$-gliedrigen Gruppe

$$A'(u_1 u_2 \ldots u_{m-1}) = B_1(u_1) B_2(u_2) \ldots B_{m-1}(u_{m-1})$$

zusammen und $A(u_1 u_2 \ldots u_m)$ entsteht durch Zusammensetzung von $A'(u_1 u_2 \ldots u_{m-1})$ und $B_m(u_m)$.

Um zu beweisen, dass sich die Parameter rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen, nehmen wir an, die Behauptung gelte für Gruppen, deren Gliederzahl kleiner als m ist, und beweisen, dass sie dann auch für m-gliedrige gilt. Da sie für eingliedrige Gruppen gilt, gilt sie dann allgemein.

Für die Gruppe A' gelten auf Grund unserer Annahme die Voraussetzungen, die im vorigen Artikel bezüglich der dort mit A' bezeichneten Gruppe gemacht worden sind; für die eingliedrige Gruppe gelten die im vorigen Artikel bezüglich der Gruppe A'' gemachten Voraussetzungen. Somit ergibt sich der Beweis unserer Behauptung aus den Betrachtungen des vorigen Artikels.

Die Gruppen erster Classe haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass unter den Potenzen einer Substitution $A(u_1 u_2 \ldots u_m)$, die der Gruppe angehört, nur dann die identische Substitution auftreten kann, wenn sich die Substitution $A(u_1 u_2 \ldots u_m)$ selbst auf die identische Substitution reducirt. Der Beweis ergiebt sich aus der Schlussbemerkung des vorigen Art. Darnach muss nämlich, damit unter den Potenzen der Substitution

$$A(u_1 u_2 \ldots u_m) = A'(u_1 u_2 \ldots u_{m-1}) B_m(u_m)$$

die identische Substitution vorkommt, $B_m(u_m)$ die identische Substitution sein, woraus $u_m = 0$ folgt. Man schliesst dann in derselben Weise weiter, dass sich jede der Substitutionen $B_{m-1}(u_{m-1}) B_{m-2}(u_{m-2}) \ldots B_1(u_1)$ auf die identische Substitution reducirt, dass also $u_1 = u_2 = u_3 \ldots = u_m = 0$ ist.

Aus der Definition der Gruppen erster Classe hat sich ergeben: man kann m untereinander linear unabhängige

inf. Transformationen der Gruppe so wählen, dass 1) jede derselben regulär von der ersten Art ist, und dass 2) die Zusammensetzung der Gruppe durch Gleichungen der Form (J) bestimmt ist.

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass umgekehrt diese beiden Eigenschaften eine Gruppe erster Classe — d. h. eine Gruppe, die nur reguläre inf. Transformationen erster Art enthält — charakterisiren. Ich unterlasse diesen Nachweis, weil er für das Folgende nicht nothwendig ist, und beschränke mich auf die Bemerkung, dass die beiden eben angeführten Eigenschaften für den Beweis hinreichen, dass sich die Parameter rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen, und dass keine Potenz einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe, die identische Substitution ergeben kann. Es ergibt sich dies unmittelbar aus dem Gang des gegebenen Beweises.

Im Folgenden wenden wir die Bezeichnung „Gruppe erster Classe“ auf alle die Gruppen an, die die beiden eben genannten charakteristischen Eigenschaften besitzen.

VI.

Wir gehen nunmehr zu den Gruppen der dritten Classe über, die reguläre inf. Transformationen sowohl von der ersten als von der zweiten Art enthalten.

Es sei $C_1(f)$ eine beliebige in der Gruppe enthaltene reguläre inf. Transformation zweiter Art.

Unter den in der Gruppe enthaltenen inf. Transformationen $K(f)$, die mit $C_1(f)$ vertauschbar sind, d. h. der Relation $C_1 K(f) - K C_1(f) = 0$ genügen, wählen wir, — wenn es solche gibt — eine reguläre Transformation zweiter Art aus und bezeichnen sie mit $C_2(f)$. Gibt es weitere reguläre Transformationen zweiter Art, die mit $C_1(f)$ und

$C_2(f)$ vertauschbar und von diesen linear unabhängig sind, so bezeichnen wir eine derselben mit $C_3(f)$ u. s. w.

Nehmen wir an, es finden sich genau m_0 reguläre Transformationen zweiter Art

$$C_1(f)\ C_2(f) \ldots C_{m_0}(f)$$

die untereinander linear unabhängig und paarweise vertauschbar sind. Diese bestimmen eine m_0-gliedrige Gruppe A_0, die der zweiten Classe angehört.[1]) Daran wird selbstredend nichts geändert, wenn wir an Stelle der inf. Transformationen

$$C_1(f)\ C_2(f) \ldots C_{m_0}(f)$$

lineare Combinationen derselben treten lassen. Wir können desshalb voraussetzen, diese m_0 inf. Transformationen seien so gewählt, dass sie ein kanonisches System für die Gruppe A_0 bilden (Art. III).

Mit $$C_{m_0+1}(f)\ C_{m_0+2}(f) \ldots C_m(f)$$

bezeichnen wir irgend welche untereinander und von $C_1(f)$ $C_2(f) \ldots C_{m_0}(f)$ linear unabhängige inf. Transformationen der vorgelegten m-gliedrigen Gruppe A.

Die m inf. Transformationen $C_i(f)$ genügen Relationen der Form

$$(J) \quad C_i C_k(f) - C_k C_i(f) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} C_j(f) \qquad i, k = 1, 2, \ldots m$$

Aus der Art, wie die m_0 ersten inf. Transformationen gewählt worden sind, folgt, dass

$$\varepsilon_j^{ik} = 0 \quad \text{für } i, k = 1, 2, \ldots m_0 \text{ und } j = 1, 2, \ldots m$$

Zwischen drei inf. Transformationen besteht die Jacobi'sche Identität[2])

---

1) Diese Zahl m_0 stimmt mit der Zahl überein, die H. Killing als Rang der Gruppe bezeichnet. Math. Annalen Bd. 33.

5) Lie, Transformationsgruppen I S. 94.

$$C_h (C_i C_k - C_k C_i) - (C_i C_k - C_k C_i) C_h + C_i (C_k C_h - C_h C_k)$$
$$- (C_k C_h - C_h C_k) C_i + C_k (C_h C_i - C_i C_h) - (C_h C_i - C_i C_h) C_k = 0$$

Sind i und k Zahlen aus der Reihe $1, 2, .. m_0$, so ist $C_i C_k - C_k C_i = 0$ und es folgt mit Rücksicht auf (J)

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{kh} (C_i C_j - C\ C_i) + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{hi} (C_k C_j - C_j C_k) = 0$$

und hieraus weiter

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} (\varepsilon_j^{kh} \varepsilon_l^{ij} + \varepsilon_j^{hi} \varepsilon_l^{kj}) C_l = 0$$

Die m inf. Transformationen $C_l(f)$ sind untereinander linear unabhängig, ferner ist $\varepsilon_j^{hi} = - \varepsilon_j^{ih}$ folglich ist

$$\sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_j^{ih} \varepsilon_l^{kj} - \varepsilon_j^{kh} \varepsilon_l^{ij}) = 0 \qquad \begin{matrix} i, k = 1, 2, .. m_0 \\ h, l = 1, 2, .. m \end{matrix}$$

Repräsentiren wir das System der m^2 Constanten ε_j^{hi} $(h, j = 1, 2, .. m)$ durch das Symbol E_i, so lassen sich die vorstehenden Gleichungen durch die symbolischen Gleichungen

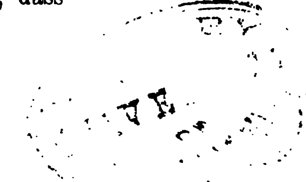
$$E_i E_k - E_k E_i = 0 \qquad i, k = 1, 2, .. m_0$$

repräsentiren. Die zu einem der m_0 Systeme E_i gehörige charakteristische Determinante kann nur Elementartheiler erster Ordnung besitzen. Denn andernfalls könnte man zwei nicht identisch verschwindende inf. Transformationen der Gruppe $K(f)$ und $K'(f)$ so bestimmen, dass

$$C_i K(f) - K C_i(f) = \omega K(f)$$
$$C_i K'(f) - K' C_i(f) = \omega K'(f) + K(f)$$

Aber dies ist wegen des dritten Hülfssatzes des Art. II nicht möglich.

Demnach genügen die m_0 Systeme E_i den Voraussetzungen, auf denen der vierte Hülfssatz des Art. II beruht. Man kann also ein System von m^2 Constanten $\gamma_k^{(h)}$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass



$$\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} \gamma_k^{(h)} = \omega_h^{(i)} \gamma_j^{(h)} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, .. m_0 \\ h, j = 1, 2, .. m. \end{matrix}$$

Von den Gleichungen (J) benützen wir nun diejenigen, die einem der Indiceswerthe $i = 1, 2, .. m_0$ entsprechen, und setzen zur Abkürzung

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^{(h)} C_j(f) = K_h(f) \qquad h = 1, 2, .. m$$

Es ergibt sich

$$(\Omega) \quad C_i K_h(f) - K_h C_i(f) = \omega_h^{(i)} K_h(f) \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, .. m_0 \\ h = 1, 2, .. m \end{matrix}$$

Weil $\varepsilon_j^{ik} = 0$ für $i, k = 1, 2, .. m_0$; $j = 1, 2, .. m$, so kann man die Grössen $\gamma_k^{(h)}$ so wählen, dass

$$\gamma_k^{(i)} = \binom{k}{i} \text{ für } i = 1, 2, .. m_0; \; k = 1, 2, .. m$$

Es ist dann $K_i(f) = C_i(f)$ für $i = 1, 2, .. m_0$ und $\omega_h^{(i)} = 0$ für $h, i = 1, 2, .. m_0$.

In dem aus m_0 Zeilen und m Spalten bestehenden System

$$\begin{matrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & .. & \omega_m^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & .. & \omega_m^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{(m_0)} & \omega_2^{(m_0)} & .. & \omega_m^{(m_0)} \end{matrix}$$

haben also alle Elemente, die den ersten m_0 Spalten angehören, den Werth Null.

Es kann der Fall eintreten, dass noch weitere Spalten dieses Systems kein von Null verschiedenes Element enthalten. Es seien dies etwa die auf die ersten m_0 Spalten folgenden m_0' Spalten, dagegen möge in jeder weiteren Spalte wenigstens ein von Null verschiedenes Element vorkommen.

Jede inf. Transformation, deren Index $h > m_0 + m_0'$ ist, genügt somit einer Relation

$$C_i K_h(f) - K_h C_i(f) = \omega_h^{(i)} K_h(f) \qquad (i \leqq m_0)$$

wo $\omega_k^{(i)}$ von Null verschieden ist. Daraus folgt: jede inf. Transformation $K_k(f)$ $(k > m_0 + m_0')$ ist regulär von der ersten Art (Art. II Hülfssatz 2) und es folgt überdies: die Grössen $\omega_k^{(i)}$ sind ganze Zahlen. Denn $\omega_k^{(i)}$ muss gleich der Differenz von zweien der Werthe r sein, für welche die zu $C_i(f)$ gehörige charakteristische Determinante $\Delta_i(r)$ verschwindet (Art II Anfang). Diese Determinante verschwindet aber nur für ganzzahlige Werthe von r, weil $C_i(f)$ regulär von der zweiten Art ist.

Bezüglich $m - m_0'$ von den inf. Transformationen

$$K_1(f)\; K_2(f) \ldots K_m(f)$$

steht nunmehr fest, dass sie regulär sind, nämlich von den m_0 ersten und von dem $m - m_0 - m_0'$ letzten. Die ersteren sind von der zweiten, die letzteren von der ersten Art. Es bleiben nur noch die m_0' inf. Transformationen übrig, die den Indices $m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots m_0 + m_0'$ entsprechen. Diese bedürfen einer besonderen Untersuchung, die im nächsten Art. durchgeführt wird.

Auf Grund der Formeln (Ω) kann nun die vorgelegte Gruppe in bemerkenswerther Weise in Untergruppen zerfällt werden. Zu diesem Zweck bilden wir zunächst — unter $\alpha_1\; \alpha_2 \ldots \alpha_{m_0}$ ganze Zahlen verstehend — eine lineare Combination der inf. Transformationen zweiter Art

$$L(f) = \alpha_1 K_1(f) + \alpha_2 K_2(f) \ldots + \alpha_{m_0} K_{m_0}(f)$$

Aus den Gleichungen (Ω) folgt

$$L K_k(f) - K_k L(f) = \varrho_k K_k(f) \qquad k = 1, 2, \ldots m$$

wo zur Abkürzung

$$\alpha_1 \omega_k^{(1)} + \alpha_2 \omega_k^{(2)} \ldots + \alpha_{m_0} \omega_k^{(m_0)} = \varrho_k$$

gesetzt ist.

Die zur Verfügung stehenden Zahlen α denken wir so gewählt, dass

1) ϱ_h nur dann $= 0$ ist, wenn gleichzeitig

$$\omega_h^{(1)} = 0 \;\; \omega_h^{(2)} = 0 \, . \, . \;\; \omega_h^{(m_0)} = 0$$

also wenn $h \leqq m_0 + m'_0$, und dass

2) zwei verschiedene Zahlen ϱ_h und ϱ_i nur dann einander gleich sind, wenn gleichzeitig

$$\omega_h^{(1)} = \omega_i^{(1)} \;\; \omega_h^{(2)} = \omega_i^{(2)} \, . \, . \;\; \omega_h^{(m_0)} = \omega_i^{(m_0)}$$

Die Indicesbezeichnung denken wir uns so gewählt, dass in der Reihe der Zahlen

$$\varrho_{m_0+m'_0+1} \quad \varrho_{m_0+m'_0+2} \cdot \cdot \; \varrho_m$$

die positiven den negativen und, unter Zahlen gleichen Vorzeichens, die dem absoluten Werthe nach grösseren den kleineren vorangehen. m_+ sei die Anzahl der positiven, m_- die Anzahl der negativen ϱ.

Bilden wir nun die Jacobi'sche Relation für die inf. Transformationen $K_h(f)$ $K_j(f)$ $L(f)$. Sie lautet:

$$\begin{aligned} L(K_h K_j - K_j K_h) - (K_h K_j - K_j K_h) L + K_h (K_j L - L K_j) \\ - (K_j L - L K_j) K_h + K_j (L K_h - K_h L) \\ - (L K_h - K_h L) K_j = 0. \end{aligned}$$

Die 4 letzten Glieder ergeben

$$-(\varrho_j + \varrho_h)(K_h K_j - K_j K_h)$$

Sei nun $K_h K_j - K_j K_h = \delta_1 K_1 + \delta_2 K_2 \, . \, . + \delta_m K_m$ wo $\delta_1 \, \delta_2 \, . \, . \, \delta_m$ Constante bedeuten, die in leicht zu übersehender Weise von den Constanten ε_j^{ik}, die in den Gleichungen (J) vorkommen, abhängen.

Nun erhält die Jacobi'sche Relation die Form

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i (L K_i - K_i L) - (\varrho_j + \varrho_h) \sum_{i=1}^{m} \delta_i K_i = 0$$

oder auch

$$\sum_{i=1}^{m} (\varrho_i - \varrho_j - \varrho_h) \, \delta_i K_i = 0$$

Weil die inf. Transformationen K_i untereinander linear unabhängig sind, so folgt hieraus

$$\delta_i = 0, \text{ wenn nicht } \varrho_i = \varrho_j + \varrho_h \text{ ist.}$$

Nehmen wir zunächst an, j und h seien Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots m_0 + m_0'$. Dann ist $\varrho_j = 0$ $\varrho_h = 0$ also $\delta_i = 0$ wenn nicht auch $\varrho_i = 0$.

In dem Ausdruck $K_h K_j - K_j K_h$ kommen in diesem Fall nur die inf. Transformationen

$$K_1(f) \; K_2(f) \ldots K_{m_0+m_0'}(f)$$

vor. Diese $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen bestimmen also für sich eine Gruppe Γ, die die m_0-gliedrige Gruppe A_0 als Untergruppe enthält.

Nehmen wir zweitens an, j und h seien Zahlen aus der Reihe $m_0 + m_0' + 1, m_0 + m_0' + 2, \ldots m_0 + m_0' + m_+$, dann sind ϱ_j und ϱ_h positiv, also ist $\delta_i = 0$, wenn nicht auch ϱ_i positiv ist. Da ferner die positiven ϱ nach absteigender Grösse geordnet sind, so kann die Gleichung $\varrho_i = \varrho_j + \varrho_h$ nur dann bestehen, also nur dann δ_i von Null verschieden sein, wenn der Index i grösser als der grössere der beiden Indices j, h ist. In dem Ausdruck $K_h K_j - K_j K_h$ kommen also nur solche inf. Transformationen K_i vor, die positiven Werthen ϱ_i entsprechen und deren Index grösser als der grössere der beiden Indices j, h ist. Demnach bestimmen die m_+ inf. Transformationen, die zu positiven Werthen ϱ gehören, für sich eine Gruppe erster Classe A_+ (vergl. Art. V Schluss) und sie bilden ein kanonisches System inf. Transformationen derselben.

Ebenso bestimmen die m_- inf. Transformationen, die zu negativen Werthen von ϱ gehören, für sich eine Gruppe A_- und bilden für dieselbe ein kanonisches System.

Nehmen wir endlich drittens für h eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots m_0 + m_0'$, für j eine Zahl aus der Reihe

$m_0 + m_0' + 1,\ m_0 + m_0' + 2, \ldots m_0 + m_0' + m_+$, so ist $\varrho_h = 0$ ϱ_j positiv und aus $\varrho_i = \varrho_h + \varrho_j$ folgt $\varrho_i = \varrho_j$ also auch ϱ_i positiv.

Man schliesst hieraus: die inf. Transformationen, die zu verschwindenden, und diejenigen, die zu positiven Werthen ϱ gehören, bestimmen zusammengenommen eine Gruppe. Mit anderen Worten: die $m_0 + m_0'$-gliedrige Gruppe Γ und die m_+-gliedrige Gruppe A_+ setzen sich zu einer Gruppe H zusammen, deren Gliederzahl $m_0 + m_0' + m_+ = m - m_-$ ist.

VII.

Die Untergruppe Γ bedarf einer eingehenderen Untersuchung.

Von den zu dieser Untergruppe gehörigen inf. Transformationen

$$K_i(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad i = 1, 2, \ldots m_0 + m_0'$$

wissen wir:

1) Die ersten m_0 derselben

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_{m_0}(f)$$

sind regulär von der zweiten Art und sie bestimmen für sich eine Untergruppe A_0.

2) Diese m_0 inf. Transformationen sind mit allen inf. Transformationen der Untergruppe Γ vertauschbar, es ist also

$$K_i K_h(f) - K_h K_i(f) = 0$$

$$\text{für } \ i = 1, 2, \ldots m_0; \ \ h = 1, 2, \ldots m_0 + m_0'.$$

In nicht symbolischer Form geschrieben heisst das:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(i)} k_{\nu\mu}^{(h)} - k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0$$

für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$ und die eben angegebenen Werthe der Indices i, h.

Da die $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen eine Gruppe bestimmen, so bestehen weitere Relationen der Form

$$3) \quad \sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(l)} - k_{\lambda\nu}^{(l)} k_{\nu\mu}^{(h)}\right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{lh} k_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n; \;\; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, \ldots m_0 + m_0'.$$

Wir werden nun beweisen: die m_0' inf. Transformationen $K_{m_0+1}(f)\; K_{m_0+2}(f) \ldots K_{m_0+m_0'}(f)$ können so gewählt werden, dass sie für sich eine m_0'-gliedrige Gruppe A_0' bestimmen, die der ersten Classe angehört. Ist dies erwiesen, so ist klar, dass die genannten inf. Transformationen so gewählt werden können, dass sie ein kanonisches System bilden.

Zum Beweise bemerken wir zunächst:

Die Coefficienten der m_0 inf. Transformationen

$$K_1(f)\; K_2(f) \ldots K_{m_0}(f)$$

genügen den Voraussetzungen des vierten Hülfssatzes des Art. II. Man kann also ein System von n^2 Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} d_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma^{(i)} d_\lambda^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \; i = 1, 2, \ldots m_0$$

Wir führen nun neue Variable durch die Substitution

$$(S) \quad x_\lambda = \sum_{\sigma=1}^{n} d_\lambda^{(\sigma)} y_\sigma \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

ein, wodurch die inf. Transformation $K_h(f)$ in

$$\overline{K}_h(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \overline{k}_{\lambda\mu}^{(h)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda} y_\mu$$

übergehen möge. Auf Grund des Weierstrass'schen Theorems stimmen die zu $K_h(f)$ und $\overline{K}_h(f)$ gehörigen charakteristischen Determinanten in ihren Elementartheilern überein. Diese beiden inf. Transformationen sind also gleichzeitig regulär

oder irregulär. Es ist ferner klar, dass zwischen den inf. Transformationen $\bar{K}_h(f)$ genau dieselben Relationen (2) und (3) bestehen, wie zwischen den inf. Transformationen $K_h(f)$.

Nun ist für $i = 1, 2, .. m_0$

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} d_\mu^{(\sigma)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} y_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n} r_\sigma^{(i)} \frac{\partial f}{\partial y_\sigma} y_\sigma$$

$$\text{also } \bar{k}_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu} r_\lambda^{(i)}$$

und aus (2)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\bar{k}_{\lambda\nu}^{(i)} \bar{k}_{\nu\mu}^{(h)} - \bar{k}_{\lambda\nu}^{(h)} \bar{k}_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, .. m_0 \\ h = m_0 + 1, m_0 + 2 .. m_0 + m_0' \end{array}$$

folgt: $\bar{k}_{\lambda\mu}^{(h)} = 0$ wenn nicht $r_\lambda^{(i)} = r_\mu^{(i)}$ für $i = 1, 2, .. m_0$.

Ist also etwa

$$r_1^{(i)} = r_2^{(i)} .. = r_\varkappa^{(i)} \quad \text{für } i = 1, 2, .. m_0$$

aber für keinen Index $\nu > \varkappa$ gleichzeitig

$$r_\nu^{(i)} = r_1^{(i)} \qquad \text{für } i = 1, 2, .. m_0$$

so hängen die Coefficienten der Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ $\frac{\partial f}{\partial y_2} .. \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}$ in $\bar{K}_h(f)$ nur von $y_1\, y_2 .. y_\varkappa$ ab, und diese Variabeln kommen in den Coefficienten der übrigen Differentialquotienten nicht vor.

Die Variabeln $y_1\, y_2 .. y_\varkappa$ lassen sich also derart in eine Reihe von Systemen vertheilen, dass die Coefficienten der Differentialquotienten nach den Variabeln eines Systems nur von den Variabeln dieses Systems abhängen. Die Anzahl dieser Systeme sei q und die Anzahl der Variabeln, die dem σ^{ten} System angehören, sei n_σ. Dieselben mögen — unter Abänderung der bisher gebrauchten Bezeichnung — mit

$$y_1^{(\sigma)}\; y_2^{(\sigma)} .. y_{n_\sigma}^{(\sigma)}$$

bezeichnet werden.

Es ergeben sich nun für unsere $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen Ausdrücke folgender Gestalt:

$$\bar{K}_i(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} R_\sigma^{(i)} y_\lambda^{(\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} \qquad i = 1, 2, .. m_0$$

$$\bar{K}_h(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} \sum_{\mu=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} y_\mu^{(\sigma)}$$

$$h = m_0 + 1,\ m_0 + 2 \,..\, m_0 + m_0'$$

Wir beweisen nun zunächst: die m_0' inf. Transformationen $\bar{K}_{m_0+1}(f)$ $\bar{K}_{m_0+2}(f) \,..\, \bar{K}_{m_0+m_0'}(f)$ können so gewählt werden, dass eine jede derselben regulär von der ersten Art ist.

Zu dem Zweck bemerken wir, dass unter den genannten Transformationen keine vorkommen kann, die regulär von der zweiten Art ist. Denn eine solche müsste von $\bar{K}_1(f)$ $\bar{K}_2(f) \,..\, \bar{K}_{m_0}(f)$ linear unabhängig und mit jeder dieser inf. Transformationen vertauschbar sein. Es gäbe also entgegen unserer Voraussetzung (Art. VI Anfang) in der Gruppe A mehr als m_0 linear unabhängige inf. Transformationen zweiter Art, die paarweise vertauschbar sind. Eine jede der m_0' Transformationen $\bar{K}_h(f)$ ist also entweder regulär von der ersten Art oder irregulär.

Nehmen wir an, die inf. Transformation $\bar{K}_h(f)$ sei irregulär. Man kann dann (s. Einleitung) eine reguläre Transformation erster Art $L(f)$ und eine gewisse Anzahl regulärer Transformationen zweiter Art $L_1(f)$ $L_2(f) \,..$ so bestimmen, dass

$$\bar{K}_h(f) = L(f) + \varrho_1 L_1(f) + \varrho_2 L_2(f) \,..\, + \varrho_\beta L_\beta(f).$$

In den inf. Transformationen $L(f)$ $L_1(f)$ $L_2(f) \,..$ sind — wie man sich leicht überzeugt[1]) — die Variabeln in genau derselben Weise getrennt, wie in $\bar{K}_h(f)$, und daraus

1) Vergl. die Inv. S. 123 gegebenen Formeln.

folgt, dass eine jede der inf. Transformationen $L(f)$ $L_1(f)$ $L_2(f)\,..$ mit den inf. Transformationen $\overline{K}_1(f)$ $\overline{K}_2(f)\,..$ $\overline{K}_{m_0}(f)$ vertauschbar ist. Weil unsere Gesammtgruppe A regulär ist, so gehört ihr eine jede der regulären Transformationen an (s. Einleitung), in die die irreguläre Transformation $\overline{K}_h(f)$ zerlegt worden ist, und weil eine jede der regulären Transformationen zweiter Art $L_1(f)$ $L_2(f)\,..$ mit $\overline{K}_1(f)$ $\overline{K}_2(f)\,..$ $\overline{K}_{m_0}(f)$ vertauschbar ist, so kann keine der Transformationen $L_1(f)$ $L_2(f)\,..$ von $\overline{K}_1(f)$ $\overline{K}_2(f)\,..$ $\overline{K}_{m_0}(f)$ linear unabhängig sein. Denn sonst gehörten gegen unsere Voraussetzung der Gruppe A mehr als m_0 untereinander linear unabhängige reguläre Transformationen zweiter Art an, die paarweise vertauschbar sind. Man kann nun offenbar die der Gruppe Γ angehörige irreguläre Transformation $\overline{K}_h(f)$ durch die ebenfalls der Gruppe Γ angehörige reguläre Transformation erster Art $L(f)$ ersetzen.

Nachdem die Zulässigkeit dieser Annahme bewiesen ist, setzen wir nunmehr jede der inf. Transformationen $\overline{K}_{m_0+1}(f)$ $\overline{K}_{m_0+2}(f)\,..$ $\overline{K}_{m_0+m_0'}(f)$ als regulär von der ersten Art voraus.

Damit die inf. Transformation

$$\overline{K}_h(f) = \sum_{\sigma=1}^{q}\left(\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma}\sum_{\mu=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} y_\mu^{(\sigma)}\right)$$

regulär von der ersten Art ist, muss jedes der q Coefficientensysteme $k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n_\sigma)$ regulär von der ersten Art sein. In der Entwicklung der charakteristischen Determinante

$$\left| k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n_\sigma$$

nach Potenzen von r verschwinden also die Coefficienten aller Potenzen von r, abgesehen von r^{n_σ}, und es ist insbesondere

$$\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = 0 \qquad \sigma = 1, 2, .. q; \; h = m_0 + 1, \; m_0 + 2 .. \; m_0 + m_0'$$

Die unter (3) angegebenen Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(l)} - k_{\lambda\nu}^{(l)} k_{\nu\mu}^{(h)}\right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{hl} k_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n; \; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'$$

gelten, wie bereits oben bemerkt worden ist, unverändert für die Coefficienten der transformirten inf. Transformationen.

Es ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n_\sigma} \left(k_{\lambda\nu}^{(h\sigma)} k_{\nu\mu}^{(l\sigma)} - k_{\lambda\nu}^{(l\sigma)} k_{\nu\mu}^{(h\sigma)}\right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{hl} k_{\nu\mu}^{(j\sigma)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2 ... n_\sigma; \; \sigma = 1, 2, .. q; \; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. m_0 + m_0'$$

und hieraus folgen für $\lambda = \mu$, wegen

$$\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = 0 \qquad \text{für } h = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'$$

$$\text{und} \quad \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = n_\sigma R_\sigma^{(h)} \qquad \text{für } h = 1, 2, .. \; m_0$$

die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{m_0} \delta_j^{hl} R_\sigma^{(j)} = 0 \qquad \sigma = 1, 2, .. q; \; h, l = m_0 + 1, m_0 + 2, .. m_0 + m_0'$$

Weil die inf. Transformationen

$$\overline{K}_1(f) \; \overline{K}_2(f) .. \; \overline{K}_{m_0}(f)$$

linear unabhängig sind, folgt hieraus

$$\delta_j^{hl} = 0 \;\; \text{für} \;\; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'; \quad \text{und} \;\; j = 1, 2 .. m_0$$

In dem Ausdruck $\overline{K}_h \overline{K}_l(f) - \overline{K}_l \overline{K}_h(f)$ kommen demnach nur die inf. Transformationen

$$\overline{K}_{m_0+1}(f) \; \overline{K}_{m_0+2}(f) .. \; \overline{K}_{m_0+m_0'}(f)$$

vor. Diese m_0' inf. Transformationen bestimmen demnach für sich eine Gruppe A_0' und diese Gruppe gehört nothwendig der ersten Classe an. Denn die m_0'-gliedrige Gruppe A_0' ist regulär, weil sie m_0' linear unabhängige reguläre Transformationen enthält, und sie kann keine reguläre Transformation zweiter Art enthalten.

VIII.

Damit ist auch für die regulären Gruppen der dritten Classe ein kanonisches System inf. Transformationen nachgewiesen. Die m inf. Transformationen dieses Systems vertheilen sich auf vier Untergruppen $A_0\, A_0'\, A_+\, A_-$. Jede dieser Untergruppen ist regulär, und zwar gehört die erste A_0 der zweiten Classe an, die drei übrigen gehören zur ersten Classe. Die inf. Transformationen, die einer dieser Untergruppen angehören, sind so gewählt, dass sie ein kanonisches System für die betreffende Untergruppe bilden.

Für alle vier Untergruppen gilt nun der Satz:

Die Parameter der Gruppe lassen sich rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen.

Für die drei Gruppen erster Classe gilt überdies der Satz: Unter den Potenzen einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe kommt die identische Substitution nicht vor.

Wir haben nun weiter bewiesen:

Die Untergruppen A_0 und A_0' setzen sich zu einer Untergruppe Γ zusammen.

Die Untergruppen Γ und A_+ setzen sich zu einer Untergruppe H zusammen.

Endlich entsteht die m-gliedrige Gruppe A selbst durch Zusammensetzung von H und A_-. Durch Anwendung der Principien des Art. IV beweist man nun erst für die Unter-

gruppe Γ, dann für die Untergruppe H, endlich für die Gruppe A selbst den zu beweisenden Satz, dass sich die Parameter der Gruppe rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen.

Dass eine Gruppe A im Allgemeinen aus drei Untergruppen $\Gamma\, A_+\, A_-$ zusammengesetzt werden kann, ergibt sich unmittelbar aus den sehr interessanten Sätzen des H. Killing über die Zusammensetzung von Gruppen.[1] Für die hier verfolgten Zwecke konnten aber diese Sätze nicht benützt werden. Denn H. Killing beschränkt sich darauf, die Zusammensetzung der Gruppe zu untersuchen, und geht auf die Natur der einzelnen inf. Transformationen nicht weiter ein, während gerade diese für die vorliegende Untersuchung von wesentlicher Bedeutung ist. So gehören — solange man nur die Zusammensetzung der Gruppen in Betracht zieht — die Gruppen, die hier als Gruppen erster und zweiter Classe unterschieden worden sind, in dieselbe Kategorie: sie sind beide Gruppen vom Rang Null.

Sobald man aber die Substitutionen der Gruppe und die zugehörigen Invariantensysteme genauer untersucht, zeigen sie die allergrösste Verschiedenheit.

---

1) Math. Annalen, Bd. 31, 33, 34, 36.



Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome.

Von Gustav Bauer.

(*Eingelaufen 4. August.*)

Das Legendre'sche Polynom n^{ten} Grades sei nach Legendrescher Bezeichnung durch X_n bezeichnet; dann ist X_n Coefficient von z^n in der Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots$$

und es berechnet sich hieraus

$$X_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right) \qquad \text{I.}$$

Diese Formel kann als Definition von X_n für jeden Werth von x gelten. Nun sagt Heine in seinem „Handbuch der Kugelfunktionen" 1. Aufl. 1861, S. 7: „Nach der Bemerkung von Euler in einem Briefe an Goldbach, dass in der Entwicklung von $\sqrt[n]{1-n^2 a}$ nach aufsteigenden Potenzen von a alle Coefficienten von a ganze Zahlen werden, erkennt man sofort, dass X_n nur eine Potenz von 2 zum numerischen Nenner hat", indem er beifügt, dass ihm diese Eigenschaft der Polynome X_n von mir mitgetheilt worden sei.[1])

1) In der 2. Auflage seines Handbuchs, I. Th. S. 14, kommt Heine auf diese Eigenschaft der Polynome X_n zurück. Man kann hinzufügen,

Diese Bemerkung in Bezug auf die Coefficienten der Form I und der bekannte Satz, dass alle Polynome X_n für $x = 1$ den Werth 1 annehmen, ist, so viel ich weiss, das einzige, was bisher in zahlentheoretischer Beziehung von diesen Polynomen bekanntgegeben wurde.

Es soll nun hier zunächst gezeigt werden, dass diese Polynome auch die bemerkenswerthe Eigenschaft besitzen, dass, wenn x irgend eine ungerade ganze Zahl ist, sie selbst ungerade ganze Zahlen sind.

2. Die Polynome X_n genügen bekanntlich der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2 X_n}{d x^2} - 2x\frac{d X_n}{d x} + n(n+1) X_n = 0 \qquad \text{II.}$$

Differentiirt man diese Gleichung wiederholt und setzt sodann in diesen Gleichungen $x = 1$, so ergiebt sich sofort die Relation

$$\frac{d^m X_n}{d x^m} = \frac{n(n+1) - m(m-1)}{2m} \cdot \frac{d^{m-1} X_n}{d x^{m-1}}$$
$$= \frac{(n-m+1)(n+m)}{2m} \frac{d^{m-1} X_n}{d x^{m-1}}$$

und hiemit, da $X_n = 1$ für $x = 1$,

$$\frac{d X_n}{d x} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{d^2 X_n}{d x^2} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3},$$
$$\frac{d^3 X_n}{d x^3} = \frac{(n-2)(n-1)\cdots(n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \quad \text{u. s. f.}$$

Mittels dieser Werthe erhält man die Entwicklung

$$X_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}(x-1) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4}\frac{(x-1)^2}{1 \cdot 2}$$
$$+ \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{(x-1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n},$$

---

sagt er hier, „dass sämmtliche Coefficienten mit 4^n multiplicirt ganze Zahlen sind". Diese Angabe ist nicht genau. Denn man beweist leicht mittelst dem in n^0 4 angegebenen Verfahren, dass die Coefficienten der Formel I höchstens 2^{n-1} im Nenner haben.

welche sich auch schreiben lässt

$$X_n = 1 + \frac{n(n+1)}{1^2}\frac{x-1}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$
$$+ \frac{(n-2)(n-1)\cdots(n+3)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \cdots \tag{1}$$

Die Coefficienten von $\left(\frac{x-1}{2}\right)^k$ in dieser Entwicklung wollen wir mit $A_n^{(k)}$ bezeichnen, so dass

$$X_n = 1 + A_n^{(1)}\left(\frac{x-1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots$$
$$+ A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n, \tag{1'}$$

wo allgemein

$$A_n^{(k)} = \frac{(n-k+1)(n-k)\cdots(n+k)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}. \tag{2}$$

Setzt man in dieser Reihe $-x$ statt x, so hat man zugleich

$$(-1)^n X_n = 1 - A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - + \cdots \tag{3}$$

und wenn man in 1) $x+2$ statt x setzt,

$$X_{n(x+2)} = 1 + A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \cdots \tag{4}$$

Also ist auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(X_{n(x+2)} + (-1)^n X_n\right) &= 1 + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \\ &\quad + A_n^{(4)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^4 + \cdots \\ \frac{1}{2}\left(X_{n(x+2)} - (-1)^n X_n\right) &= A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &\quad + A_n^{(3)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aus Gleichung 3) folgt sofort für $x=1$, dass die Coefficienten A_n der Relation genügen

$$1-A_n^{(1)}+A_n^{(2)}-+\cdots\pm A_n^{(n)}=(-1)^n \tag{6}$$

3. Es soll nun bewiesen werden, dass die Coefficienten A_n sämmtlich ganze gerade Zahlen sind.[1])

Hiezu haben wir zunächst zu fragen, wie oft eine gegebene Primzahl θ in dem Produkt $1\cdot2\cdot3\cdots N$ enthalten ist. Diese Frage ist schon von Legendre[2]) beantwortet. Ist nämlich $E\left(\frac{N}{\theta}\right)$ die grösste ganze Zahl, welche in dem Bruch $\frac{N}{\theta}$ enthalten ist, so ist die gesuchte Zahl, d. i. der Exponent der höchsten Potenz von θ, welche in $1\cdot2\cdots N$ enthalten ist, durch die Formel gegeben

$$\sigma=E\left(\frac{N}{\theta}\right)+E\left(\frac{N}{\theta^2}\right)+E\left(\frac{N}{\theta^3}\right)+\cdots,$$

wo die Reihe fortzusetzen ist, bis der Nenner θ^i grösser als N wird.

Theilt man nun N in zwei oder mehrere ganze Zahlen, z. B. in die drei Zahlen n, n', n'', sodass $N=n+n'+n''$,

---

1) Setzt man in den Gleichungen 1) 3) $x=\cos a$, $\frac{1-x}{2}=\sin^2\frac{1}{2}a$, $\frac{1+x}{2}=\cos^2\frac{1}{2}a$, so werden dieselben

$$X_n(\cos a)=1-A_n^{(1)}\sin^2\frac{1}{2}a+A_n^{(2)}\sin^4\frac{1}{2}a-+\cdots$$

$$(-1)^n X_n(\cos a)=1-A_n^{(1)}\cos^2\frac{1}{2}a+A_n^{(2)}\cos^4\frac{1}{2}a-+\cdots$$

In dieser Form sind die Gleichungen längst bekannt und schon von Dirichlet gegeben worden (Crelle J. Bd. XVII). Aber man scheint nicht bemerkt zu haben, dass die Coefficienten dieser Reihen sämmtlich ganze Zahlen sind, was allerdings auch wenig Interesse bietet, so lange man die Polynome X nur für Werthe von $x<1$ betrachtet.

2) Legendre, Théorie des Nombres, 3me éd. 1830, T. I p. 10.

so ist klar, dass $E\left(\frac{N}{\theta^i}\right)$ nicht kleiner sein kann als $E\left(\frac{n}{\theta^i}\right) + E\left(\frac{n'}{\theta^i}\right) + E\left(\frac{n''}{\theta^i}\right)$; wohl aber kann es grösser als diese Summe sein; denn bleiben bei der Division von n, n', n'' durch θ^i die Reste α, β, γ und ist $\alpha+\beta+\gamma > \theta^i$, so wird $E\left(\frac{N}{\theta^i}\right)$ um 1 oder auch 2 grösser sein, als diese Summe. Hieraus folgt, dass für irgend eine Primzahl θ

$$\Sigma E\left(\frac{N}{\theta^i}\right) \geq \Sigma E\left(\frac{n}{\theta^i}\right) + \Sigma E\left(\frac{n'}{\theta^i}\right) + \Sigma E\left(\frac{n''}{\theta^i}\right)$$

die Summen auf die Potenzen von θ ausgedehnt, die in N enthalten sind.

Hieraus folgt unmittelbar der Satz[1]): In dem Ausdruck

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!\cdots}, \quad \text{wo } N = n + n' + n'' + \cdots,$$

ist jede in dem Nenner enthaltene Primzahl wenigstens ebenso oft im Zähler enthalten als im Nenner und der Ausdruck stellt mithin eine ganze Zahl dar.

Der Coefficient $A_n^{(k)}$ kann nun auf diese Form gebracht werden, nämlich

$$A_n^{(k)} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,k!\,k!}$$

Es ist hier $N = n + k$, und diese Zahl ist in die 3 Theile $n-k$, k, k, zerlegt. Also ist $A_n^{(k)}$ eine ganze Zahl.

4. In dem besonderen Falle, wenn $\theta = 2$, ist für $N = 2^p$ die Zahl $\sigma = 2^p - 1$. Nun kann aber irgend eine Zahl N in der Form

$$N = 2^p + 2^q + 2^r + \cdots, \qquad p > q > r \cdots$$

dargestellt werden, und die Anzahl der Faktoren 2, welche in dem Produkt $1\cdot2\cdot3\cdots N$ enthalten sind, ist also $N - h$,

1) Unter $N!$ ist hier das Produkt $1\cdot2\cdot3\cdots N$ zu verstehen.

wenn h die Anzahl der Glieder 2^p, $2^q \cdots$ in N ist (Legendre a. a. O. p. 12).

Frägt man nun, wie oft der Faktor 2 in

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!} \qquad (N = n + n' + n'')$$

vorkommt, so ersieht man, dass der ungünstigste Fall eintritt, wenn n, n', n'' selbst Potenzen von 2 sind, $n = 2^p$, $n' = 2^q$, $n'' = 2^r$, also $N = 2^p + 2^q + 2^r$; in diesem Falle ist der Faktor 2 nämlich im Zähler und im Nenner $N - 3$ mal enthalten und die Zahl $\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!}$ enthält den Faktor 2 gar nicht, und ist also eine ungerade Zahl. Eine Ausnahme hievon tritt ein, wenn zwei der Zahlen n, n', n'' oder auch alle drei gleich sind; denn ist $n' = n'' = 2^q$, so ist $N = 2^p + 2^{q+1}$ und der Faktor 2 ist dann in dem Produkt $1 \cdot 2 \cdots N$ noch $N - 2$ mal enthalten, während er im Nenner $n!\,n'!\,n''!$ nur $N - 3$ mal enthalten ist. Aber man sieht, dass ähnliches eintritt, sowie überhaupt zwei der Zahlen n, n', n'' gleich sind. Ist $n' = n'' = 2^v + 2^w + \cdots$ und i die Anzahl dieser Glieder 2^v, $2^w \cdots$ so wird $N!$ die Zahl 2 wenigstens i-mal öfter enthalten, als der Nenner $n!\,n'!\,n''! \cdots$ und man kann daher obigen Satz dahin ergänzen:

Sind in dem Ausdruck

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!\ldots} \qquad (N = n + n' + n'' + \cdots)$$

zwei (oder mehrere) der Zahlen n, n', n'', $\cdots$ gleich, so ist derselbe eine ganze gerade Zahl.

Dieser Fall tritt ein bei dem Coefficienten $A_n^{(k)} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,k!\,k!}$ und folglich ist dieser Coefficient immer eine gerade Zahl.

5. Setzt man in den Gleichungen 1) 3) für x irgend eine ungerade ganze Zahl, $x = 2y + 1$, so werden dieselben

$$\left.\begin{aligned} X_{n(2y+1)} &= 1 + A_n^{(1)} y + A_n^{(2)} y^2 + \cdots + A_n^{(n)} y^n \\ (-1)^n X_{n(2y+1)} &= 1 - A_n^{(1)} (y+1) + A_n^{(2)} (y+1)^2 + \cdots \\ &\quad \pm A_n^{(n)} (y+1)^n \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

woraus die in Nr. 1 angegebene Eigenschaft dieser Polynome X_n hervorgeht, dass sie ganze ungerade Zahlen werden, wenn für x irgend eine ungerade Zahl $2y+1$ gesetzt wird. Zugleich ersieht man, dass dieselben sowohl nach Potenzen von y, als auch nach Potenzen von $y+1$ in ganzzahlige Reihen entwickelt werden können.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich ferner, dass für $x = 2y+1$

$$X_n - X_n'$$

für irgend welche Indices n, n' immer durch y theilbar ist, und ebenso, dass, je nachdem n, n' gleichartig oder ungleichartig sind, im ersten Falle

$$X_n - X_n',$$

im zweiten

$$X_n + X_n'$$

durch $y+1$ theilbar sind.

Aus den Gleichungen 5) folgt für $x = 2y-1$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} (X_{n(2y+1)} + (-1)^n X_{n(2y-1)}) \\ &\quad = 1 + A_n^{(2)} y^2 + A_n^{(4)} y^4 + \cdots \\ &\frac{1}{2} (X_{n(2y+1)} - (-1)^n X_{n(2y-1)}) \\ &\quad = A_n^{(1)} y + A_n^{(3)} y^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

woraus ersichtlich, dass auch

$$X_{n(2y+1)} - (-1)^n X_{n(2y-1)}$$

immer durch y theilbar ist.

Wenn nun aber x eine gerade Zahl ist, so zeigen die Gleichungen 1) und 3), dass sich X_n nur ausnahmsweise

auf eine ganze Zahl reduciren wird.[1]) Da das höchste Glied der Reihe 1) $A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ ist, so steht darin 2^n im Nenner; aber

$$A_n^{(n)}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

hat, wenn $n=2^p+2^q\,2^r+\cdots$ mit i-Gliedern ist und also $2n=2^{p+1}+2^{q+1}+2^{r+1}+\cdots$, nach Nr. 4 $(2n-i)-(n-i)-(n-i)=i$ Faktoren 2, so dass in $A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ nur noch 2^{n-i} im Nenner bleibt. Nur wenn n eine Potenz von 2 ist, also $i=1$, bleibt noch 2^{n-1} im Nenner. Das vorletzte Glied $A_n^{(n-1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}$ kann in jedem Falle höchstens 2^{n-2} im Nenner behalten; das drittletzte höchstens nur 2^{n-3} u. s. f. Man sieht also, dass, wenn x eine gerade Zahl ist, X_n höchstens den Nenner 2^{n-1} haben kann; dies wird aber nur eintreten, wenn n eine Potenz von 2 ist; in allen andern Fällen hat X_n, wenn x eine ganze gerade Zahl ist, 2^{n-2} oder eine niedrigere Potenz von 2 im Nenner.

6. Da, wenn n gerade, X_n nur gerade Potenzen von x enthält, und dasselbe von $\frac{X_n}{x}$ gilt, wenn n ungerade, so lassen sich diese Polynome auch nach Potenzen von x^2-1 entwickeln. Man erhält für gerade n

$$X_n=1+a_n^{(1)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)+a_n^{(2)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^2+\cdots \\ +a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{9}$$

wo

$$a_n^{(1)}=\frac{n(n+1)}{1^2},\quad a_n^{(2)}=\frac{(n-2)\,n\cdot(n+1)(n+3)}{1^2\cdot 2^2},\ \cdots$$

---

1) Dies tritt z. B. ein für $n=3$.

allgemein

$$a_n^{(k)} = \frac{(n-2k+2)(n-2k+4)\cdots n\cdot(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2},$$

Für ungerade n

$$\begin{aligned}\frac{X_n}{x} = 1 + b_n^{(1)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right) + b_n^{(2)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^2 + \cdots \\ + b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}.\end{aligned} \tag{10}$$

wo

$$b_n^{(1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{1^2},\quad b_n^{(2)} = \frac{(n-3)(n-1)\cdot(n+2)(n+4)}{1^2\cdot 2^2},\cdots$$

allgemein

$$b_n^{(k)} = \frac{(n-2k+1)(n-2k+3)\cdots(n-1)\cdot(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2}$$

Die Coefficienten a, b in diesen Reihen sind ebenfalls sämmtlich ganze und gerade Zahlen, wie sogleich gezeigt werden soll.

Setzt man $x = 2y+1$, so wird $\frac{x^2-1}{4} = y(y+1)$ und man erhält also, wenn x eine ungerade Zahl $2y+1$ ist, folgende ganzzahlige Reihenentwicklungen nach Potenzen von $y(y+1)$[1]:

---

1) Für $x = \cos a$ erhält man aus den Gleichungen 9) 10) für gerade n

$$X_n(\cos a) = 1 - a_n^{(1)}\left(\frac{\sin a}{2}\right)^2 + a_n^{(2)}\left(\frac{\sin a}{2}\right)^4 - + \cdots \pm a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\sin a}{2}\right)^n$$

für ungerade n

$$\begin{aligned}X_n(\cos a) = \cos a \Big\{1 - b_n^{(1)}\left(\frac{\sin a}{2}\right)^2 + b_n^{(2)}\left(\frac{\sin a}{2}\right)^4 - + \cdots \\ \pm b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{\sin a}{2}\right)^{n-1}\Big\}\end{aligned}$$

Diese **einfachsten ganzzahligen** Entwicklungen von $X_n(\cos a)$ sind, so viel ich weiss, bisher noch nicht gegeben worden.

für gerade n

$$\begin{aligned} X_n = 1 + a_n^{(1)}\, y\,(y+1) + a_n^{(2)}\, y^2\,(y+1)^2 + \cdots \\ + a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\, y^{\frac{n}{2}}\,(y+1)^{\frac{n}{2}} \end{aligned} \tag{11}$$

für ungerade n

$$\begin{aligned} \frac{X_n}{x} = 1 + b_n^{(1)}\, y\,(y+1) + b_n^{(2)}\, y^2\,(y+1)^2 + \cdots \\ + b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\, y^{\frac{n-1}{2}}\,(y+1)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \tag{12}$$

Entwickelt man in 11) die Potenzen von $(y+1)$ und vergleicht sodann die Reihe mit der Reihe 7) so ergiebt sich

$$a_n^{(1)} = A_n^{(1)}, \quad a_n^{(2)} = A_n^{(2)} - a_n^{(1)} = A_n^{(2)} - A_n^{(1)},$$

und allgemein

$$\left.\begin{aligned} A_n^{(2k)} &= a_n^{(k)} + \binom{k+1}{k-1} a_n^{(k+1)} + \binom{k+2}{k-2} a_n^{k+2} + \cdots + \binom{2k-1}{1} a_n^{(2k-1)} + a_n^{(2k)} \\ A_n^{(2k-1)} &= \binom{k}{k-1} a_n^{(k)} + \binom{k+1}{k-2} a_n^{(k+1)} + \cdots + \binom{2k-2}{1} a_n^{(2k-2)} + a_n^{(2k-1)} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Da in diesen Recursionsformeln der höchste Coefficient a immer den Faktor 1 hat, so berechnet sich hieraus $a_n^{(2k)}$, resp. $a_n^{(2k-1)}$ durch eine Reihe der A_n mit ganzen Coefficienten. Also sind auch die a ganze gerade Zahlen.

Die Vergleichung der Coefficienten von y^n und y^{n-1} in den beiden Reihen 7) und 11) liefert

$$a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} = A_n^{(n)}, \quad \frac{n}{2}\, a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} = A_n^{(n-1)},$$

woraus

$$A_n^{(n-1)} = \frac{n}{2}\, A_n^{(n)} \tag{15}$$

sich ergiebt. Das Bildungsgesetz der A_n zeigt, dass diese Relation in der That stattfindet, und zwar für gerade und ungerade n. Es ist also auch $A_n^{(n-1)}$ immer durch n theilbar. Dies ist aber nur ein specieller Fall des allgemeinen Gesetzes, dass $A_n^{(k-1)}$ immer durch k theilbar ist. (Nr. 7.)

Ebenso giebt die Vergleichung der Reihe 12) mit der Reihe 7) Recursionsformeln für die Berechnung der b_n aus den A_n; dieselben sind wegen des Faktors $x = 2y + 1$ etwas complicirter als die Formeln 13) haben aber mit diesen die Eigenschaft gemein, dass der höchste Coefficient b_n in denselben den Faktor 1 hat. Man erhält also für die Coefficienten b_n ebenfalls eine Reihe der A_n mit ganzen Coefficienten. Also sind auch die b_n ganze gerade Zahlen.

Speciell ergiebt sich

$$b_n^{(1)} = A_1 - 2$$

und aus der Vergleichung der Coefficienten von y^{n-1} und y_n

$$n\, b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = A_{n-1}^{(n-1)}, \quad 2\, b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = A_n^{(n)}$$

Hieraus folgt zunächst wieder die Relation 14); ferner für den letzten Coefficienten b_n

$$b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{1}{2} A_n^{(n)} \tag{15}$$

Hiebei ist zu bemerken, dass, wie wir in Nr. 5 sahen, $A_n^{(n)}$ immer den Faktor 2 mehrfach enthält, ausgenommen, wenn n eine Potenz von 2 ist. Dieser Fall ist aber hier ausgeschlossen, da in der Reihe 12) n eine ungerade Zahl ist; also ist $b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ auch eine gerade Zahl.

7. Bildet man aus den Gleichungen 7) die Differenz $X_{n+1} - X_{n-1}$, so trennt sich in den Coefficienten der Faktor $2n + 1$ los und man erhält für $x = 2y + 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1}) = 2y + \mathfrak{A}_n^{(2)} y^2 + \mathfrak{A}_n^{(3)} y^3 + \cdots \\ + \mathfrak{A}_n^{(n+1)} y^{n+1}\end{aligned} \tag{16}$$

oder auch

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}(X_{n+1}-X_{n-1}) = 2(y+1) - \mathfrak{A}_n^{(2)}(y+1)^2 + \mathfrak{A}_n^{(3)}(y+1)^3 - + \cdots \pm \mathfrak{A}_n^{(n+1)}(y+1)^{n+1}, \tag{17}$$

wo von $k=2$ an

$$\mathfrak{A}_n^{(k)} = 2k \cdot \frac{(n-k+2)(n-k+3)\cdots(n+k-1)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}.$$

Dass trotz der Abtrennung des Faktors $2n+1$ aus der Differenz $A_{n+1}^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}$ diese Coefficienten $\mathfrak{A}_n^{(k)}$ wieder ganze gerade Zahlen sind, lässt sich auf folgende Weise zeigen. Die Polynome X genügen der Relation

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0 \qquad \text{III.}$$

Hieraus zieht man leicht

$$\frac{1}{2n+1}(X_{n+1}-X_{n-1}) = \frac{xX_n - X_{n-1}}{n+1}$$

Ist x eine ungerade ganze Zahl, so sind die Zähler der Brüche auf beiden Seiten ganze gerade Zahlen; und da $2n+1$ und $n+1$ keinen Faktor gemein haben, so folgt, dass

$$X_{n+1} - X_{n-1} \quad \text{durch } 2n+1$$

und

$$xX_n - X_{n-1} \quad \text{durch } n+1$$

theilbar sind, wenn x eine ungerade Zahl. Da also die Reihen in den Gleichungen 16), 17) für alle ganze Zahlen y ganze gerade Zahlen darstellen, so lässt sich schliessen, dass auch die Coefficienten $\mathfrak{A}$ ganze und gerade Zahlen sind.

Dies lässt sich aber auch mittelst des Satzes in Nr. 3 erweisen. Denn es ist

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)} = \frac{(n+k-1)!}{(n-k+1)!\,k!\,(k-1)!}$$

Nun sagt der Satz aus, dass $\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!}$ eine ganze Zahl ist, wenn $N = n + n' + n''$. In $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)}$ ist $N = n + k - 1$, aber die Summe der drei Zahlen im Nenner ist $n + k = N + 1$. Der Satz lässt sich also nicht unmittelbar anwenden. Aber wenn eine Primzahl θ die Zahl k theilt, so theilt sie $k-1$ nicht und ist also ebenso oft in $(k-2)!$ enthalten, als in $(k-1)!$; theilt θ aber k nicht, so ist θ jedenfalls ebenso oft in $(k-1)!$ enthalten als in $k!$ Man kann daher bei der Bestimmung wie oft eine Primzahl θ in $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)}$ als Faktor steht immer die Summe der drei Zahlen im Nenner um 1 verringern, d. h. auf N reduciren, und sodann wie in in Nr. 3 schliessen, dass jede Primzahl wenigstens so oft im Zähler steht als im Nenner. $\mathfrak{A}_n^{(k)}$ ist also eine ganze gerade Zahl.

Hieraus ergiebt sich auch eine Eigenschaft der Coefficienten A_n. Denn die Vergleichung der Ausdrücke für $\mathfrak{A}_n$ und A_n liefert

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)} = \frac{1}{k} A_n^{(k-1)}$$

und, da $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n$ eine ganze Zahl, so folgt, dass die Zahl $A_n^{(k-1)}$ durch k theilbar ist.

8. Bekanntlich giebt $\frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1})$ das Integral von X_n, so genommen, dass es für $x = 1$ verschwindet, d. h. es ist

$$\int_1 X_n\, dx = \frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1})$$

Die Gleichungen 16) 17) zeigen also, dass dieses Integral von X_n ebenfalls eine ganze Zahl ist (und zwar eine gerade), wenn x eine ungerade Zahl $2y + 1$ ist, und geben die Entwicklung dieser Zahl nach Potenzen von y oder $y + 1$.

Man kann auch die Gleichungen 11) und 12) benützen, um eine Entwicklung des Integrals nach Potenzen von $y(y+1)$ zu erhalten.

Es ergiebt sich dann für $x = 2y+1$, wenn n ungerade

$$\int_1 X_n\,dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} = 2y(y+1) + \mathfrak{a}_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots + \mathfrak{a}_n^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} y^{\frac{n+1}{2}} (y+1)^{\frac{n+1}{2}} \tag{18}$$

wo

$$\mathfrak{a}_n^{(2)} = 4 \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2}, \quad \mathfrak{a}_n^{(3)} = 6 \cdot \frac{(n-3)(n-1) \cdot (n+2)(n+4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$$

und allgemein von $k = 2$ an

$$\mathfrak{a}_n^{(k)} = 2k \cdot \frac{(n-2k+3)(n-2k+5) \cdots (n-1) \cdot (n+2)(n+4) \cdots (n+2k-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}$$

Wenn n gerade

$$\int_1 X_n\,dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} = (2y+1)\left\{ 2y(y+1) + \mathfrak{b}_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots + \mathfrak{b}_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}} (y+1)^{\frac{n}{2}} \right\} \tag{19}$$

wo

$$\mathfrak{b}_n^{(2)} = 4 \cdot \frac{(n-2)(n+3)}{1^2 \cdot 2^2}, \quad \mathfrak{b}_n^{(3)} = 6 \cdot \frac{(n-4)(n-2) \cdot (n+3)(n+5)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$$

und allgemein von $k = 2$ an

$$\mathfrak{b}_n^{(k)} = 2k \cdot \frac{(n-2k+2)(n-2k+4) \cdots (n-2) \cdot (n+3)(n+5) \cdots (n+2m-1)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}$$

Auch hier lässt sich wie oben (Nr. 6) erweisen, dass die Coefficienten $\mathfrak{a}_n^{(k)}$, $\mathfrak{b}_n^{(k)}$ sämmtlich ganze gerade Zahlen sind.

9. Da der Differentialquotient von X_n durch die Formel

$$\frac{d\,X_n}{d\,x} = (2\,n-1)\,X_{n-1} + (2\,n-5)\,X_{n-2} + \cdots$$

gegeben ist, so folgt, dass, wenn x eine ungerade Zahl ist, auch $\frac{d\,X_n}{d\,x}$ eine ganze Zahl ist, und man sieht, dass sich diese Eigenschaft auch auf die höheren Differentialquotienten von X_n überträgt.

Das Polynom X_n hat also die merkwürdige Eigenschaft, dass, wenn x eine ungerade ganze Zahl ist, nicht nur X_n selbst, sondern auch $\int_1 X_n\,d\,x$ und alle Differentialquotienten von X_n ganze Zahlen sind.

10. Es möge nun hier noch eine Tabelle der Entwicklungen von X_n nach den Gleichungen 7), 11), 12) und von $\int_1 X_n\,d\,x$ nach den Gleichungen 16—19) folgen. Es ist darin auf der linken Seite immer x durch $2\,y+1$ zu ersetzen.

$$X_1 = 1 + 2\,y$$
$$-X_1 = 1 - 2\,(y+1)$$
$$X_2 = 1 + 6\,y + 6\,y^2$$
$$+X_2 = 1 - 6\,(y+1) + 6\,(y+1)^2$$
$$X_3 = 1 + 12\,y + 30\,y^2 + 20\,y^3$$
$$-X_3 = 1 - 12\,(y+1) + 30\,(y+1)^2 - 20\,(y+1)^3$$
$$X_4 = 1 + 20\,y + 90\,y^2 + 140\,y^3 + 70\,y^4$$
$$+X_4 = 1 - 20(y+1) + 90(y+1)^2 - 140(y+1)^3 + 70(y+1)^4$$
$$X_5 = 1 + 2\cdot 15y + 3\cdot 70\cdot y^2 + 4\cdot 140y^3 + 5\cdot 126y^4 + 6\cdot 42y^5$$
$$X_6 = 1 + 2\cdot 21y^2 + 3\cdot 140\cdot y + 4\cdot 420\cdot y^3 + 5\cdot 630\cdot y^4 + 6\cdot 462\cdot y^5 + 7\cdot 132\cdot y^6$$
$$X_7 = 1 + 2\cdot 28\,y + 3\cdot 252\cdot y^2 + 4\cdot 1050\cdot y^3 + 5\cdot 2310\cdot y^4 + 6\cdot 2772\cdot y^5 + 7\cdot 1716\cdot y^6 + 8\cdot 429\cdot y^7$$

* * *

$$\frac{X_1}{x} = 1$$
$$X_2 = 1 + 6\,y\,(y+1)$$
$$\frac{X_3}{x} = 1 + 10\,y\,(y+1)$$
$$X_4 = 1 + 20\,y\,(y+1) + 70\,y^2\,(y+1)^2$$
$$\frac{X_5}{x} = 1 + 28\,y\,(y+1) + 126\,y^2\,(y+1)^2$$
$$X_6 = 1 + 42\,y\,(y+1) + 378\,y^2\,(y+1)^2 + 924\,y^3\,(y+1)^3$$
$$\frac{X_7}{x} = 1 + 54\,y\,(y+1) + 594\,y^2\,(y+1)^2 + 1716\,y^3\,(y+1)^3$$
$$X_8 = 1 + 72\,y\,(y+1) + 1188\,y^2\,(y+1)^2 + 6864\,y^3\,(y+1)^3 + 12870\,y^4\,(y+1)^4$$

* * *

$$\int_1 X_1\,d\,x = \frac{1}{3}(X_2 - X_0) = 2\,y + 2\,y^2$$
$$-\int_1 X_1\,d\,x = 2\,(y+1) - 2\,(y+1)^2$$
$$\int_1 X_2\,d\,x = \frac{1}{5}(X_3 - X_1) = 2\,y + 6\,y^2 + 4\,y^3$$
$$+\int_1 X_2\,d\,x = 2\,(y+1) - 6(y+1)^2 + 4(y+1)^3$$
$$\int_1 X_3\,d\,x = \frac{1}{7}(X_4 - X_2) = 2\,y + 12\,y^2 + 20\,y^3 + 10\,y^4$$
$$-\int_1 X_3\,d\,x = 2(y+1) - 12(y+1)^2 + 20(y+1)^3 - 10\,(y+1)^4$$
$$\int_1 X_4\,d\,x = \frac{1}{9}(X_5 - X_3) = 2y + 20y^2 + 60y^3 + 70y^4 + 28y^5$$
$$+\int_1 X_4\,d\,x = 2(y+1) - 20(y+1)^2 + 60(y+1)^3 - 70\,(y+1)^4 + 28\,(y+1)^5$$

$$\int_1 X_5\,dx = \frac{1}{11}(X_6 - X_4) = 2y + 2\cdot 15y^2 + 2\cdot 70y^3 + 2\cdot 140y^4 + 2\cdot 126\,y^5 + 2\cdot 42\,y^6$$

$$\int_1 X_6\,dx = \frac{1}{13}(X_7 - X_5) = 2y + 2\cdot 21y^2 + 2\cdot 140y^3 + 2\cdot 420y^4 + 2\cdot 630\,y^5 + 2\cdot 462\,y^6 + 2\cdot 132\,y^7$$

* * *

$$\int_1 X_1\,dx = 2\,y\,(y+1)$$

$$\int_1 X_2\,dx = (2\,y+1)\cdot 2\,y\,(y+1)$$

$$\int_1 X_3\,dx = 2\,y\,(y+1) + 10\,y^2\,(y+1)^2$$

$$\int_1 X_4\,dx = (2\,y+1)\,[2\,y\,(y+1) + 14\,y^2\,(y+1)^2]$$

$$\int_1 X_5\,dx = 2\,y\,(y+1) + 28\,y^2\,(y+1)^2 + 84\,y^3\,(y+1)^3$$

$$\int_1 X_6\,dx = (2y+1)[2y(y+1) + 36y^2(y+1)^2 + 132y^3(y+1)^3]$$

$$\int_1 X_7\,dx = 2\,y\,(y+1) + 54\,y^2\,(y+1)^2 + 396\,y^3\,(y+1)^3 + 858\,y^4\,(y+1)^4$$

* * *



Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1894.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Band XV. 1893. 8°.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations 1886—87. 1893. fol.

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XVII, 2. 1893. 8°.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Monumenta. Vol. XXIV, XXV. 1893. 8°.
Starine. Vol. XXVI. 1893. 8°.
Ljetopis. 1893. 8°.
Rad. Band 116. 117. 1893. 8°.

New-York State Library in Albany:

73—75th annual Report. 1891—93. 8°.
State Library Bulletin. Legislation No. 4. January 1894. 8°.

Historischer Verein in Augsburg:

Zeitschrift. Jahrg. XX. 1893. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

31. Bericht. 1894. 8°.

Texas Academy of Science in Austin:

Transactions. Vol. I, No. 2. 1893. 8°.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XIII, No. 109—112. 1894. 4°.
American Journal of Mathematics. Vol. XIV, No. 4. Vol. XV, No. 1—4. 1892/93. 8°.
The American Journal of Philology. Vol. XIII, No. 4. Vol. XIV, No. 1—2. 1892/93. 8°.

American Chemical Journal. Vol. XIV, No. 8, Vol. XV, No. 1—7. 1892/93. 8⁰.
Studies in historical and political Science. Ser. X, No. 12. Ser. XI, No. 1—10. 1892/93. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1893/94. 4⁰ und 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. N. F. Bd. IV, Heft 2. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band IX, Heft 3. 1893. 8⁰.

Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 36, afl. 4, 5, 6. 1893. 8⁰.
Notulen. Deel XXXI, No. 1, 2. 1893. 8⁰.
Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811. Deel XI. 1893. 8⁰.
Dagh-Register gehouden in't Casteel Batavia Anno 1664. 1893. 4⁰.

K. serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Geologija Srbije von Johann Schujowitsch. Heft 1. 1893. 4⁰.
Glas. No. 41, 42. 1894. 8⁰.
Godischniak (Jahrbuch) 1889 u. 1890. 1890/91. 8⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Corpus inscriptionum latinarum. Vol. VIII. Supplementum, fasc. 3. 1893. fol.
Politische Korrespondenz König Friedrichs II. Bd. XX. 1894. 8⁰.
Sitzungsberichte. 1893. No. 39—53. gr. 8⁰.
Abhandlungen aus dem Jahre 1892. 4⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Jahrbuch für das Jahr 1892. Bd. XIII. 1893. 8⁰.
Abhandlungen. Neue Folge. Heft 2 mit Atlas in 4⁰ und Heft 9, Theil II. 1893. 8⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Berlin:

Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. I. 1894. 4⁰.
Ueber die Ziele und die Thätigkeit der phys.-techn. Reichsanstalt, von Dr. Lummer. 1894. 4⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

Hermann Rietschel, Der Stand der wissenschaftlichen und praktischen Wohnungs-Hygiene in Beziehung zur Luft. 1894. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 26. Jahrg. No. 19, 20. 27. Jahrg. No. 1—11. 1893/94. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 45, Heft 3. 1893. 8⁰.

Medizinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Band XXIV. 1894. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Fortschritte der Physik im Jahre 1887. 43. Jahrg. 3 Bände. 1893. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. VII, No. 20—26. Bd. VIII, 1—6. 1893/94. 8⁰.
Verhandlungen der physiolog. Gesellschaft. Jahrg. 1893—94 No. 2—10.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band VIII, Heft 4. Bd. IX, Heft 1. 1894. 4⁰.

Geodätisches Institut in Berlin:

Jahresbericht für 1892/93. 1893. 8⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1890. Heft II, III. 1891—93. 4⁰.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung. 1893, Heft II. 1894. 4⁰.
Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen im Jahre 1892. 1894. 4⁰.
Bericht über die Thätigkeit im Jahre 1893. 1894. 8⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 23. Heft 1, 2. 1894. 8⁰.

Commission für die Beobachtung des Venus-Durchganges in Berlin:

Die Venus-Durchgänge 1874 und 1882. Band V. 1893. 4⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Band 7, I. Hälfte. Leipzig 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band IX, Heft 1—6. 1894. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 13. Jahrg. 1893. Heft 12. 14. Jahrg. Heft 1—6. 1893/94. 4⁰.

Schweizerische geologische Commission in Bern:

Beiträge zu einer geologischen Karte der Schweiz. Lief. VII mit 1 Karte. Lief. XXI mit Atlas. Lief. XXII. Text. 1893. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Mittheilungen aus dem Jahre 1892. 1893. 8⁰.

Allgemeine schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:

Neue Denkschriften. Bd. XXXIII, Abth. 1. Basel 1893. 4⁰.
Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft bei ihrer Versammlung in Basel den 5.—7. Septbr. 1892, mit französischer Uebersetzung. Basel 1892. 8⁰.

Gewerbeschule in Bistritz:

XVIII. Jahresbericht für das Schuljahr 1892/93. 1893. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Monumenti. Serie I. Statuti No. 3. Serie II. Carte No. 1. Appendice ai Monumenti Ravennati. Tom. II, disp. II. Ravenna 1884—86. 4⁰.
Atti e Memorie. III. Serie. Vol. XI, fasc. 4—6. 1894. 4⁰.
La R. Deputazione di storia patria per le provincie di Romagna dall' anno 1860 al 1894. 1894. 8⁰.

Universität in Bonn:

Wendelin Förster, Freundesbriefe von Friedrich Diez. 1894. 4°.

Naturhistorischer Verein der preuss. Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 50. Jahrgang, II. Hälfte. 1893. 8°.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1893. No. 23, 24. 1894. No. 1—10. 8°.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 28. 1893. 4°.

Public Library in Boston:

Annual Report 1893. 1894. 8°.

Boston Society of Natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 26, part 1. 1893. 8°.
Memoirs. Vol. IV, No. XI. 1893. 4°.
Occasional Papers. No. IV. 1893. 8°.

Meteorologische Station in Bremen:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. 4. Jahrg. 1894. fol.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XIII, 1 und Extrabeilage. 1893/94. 8°.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Bd. 31. 1892. 1893. 8°.
XI. Bericht der meteorologischen Commission. 1893. 8°.

Académie Royale de Médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tom. 7, No. 10, 11. Tom. 8, No. 1—5. 1893/94. 8°.

Académie Royale des Sciences in Brüssel:

Annuaire. 1894. 60e année. 8°.
Bulletin. 63e année. 3. Série. Tom. 26, No. 12, Tom. 27, No. 1—5, 1893/94. 8°.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XIII, fasc. 1, 2. 1894. 8°.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Ungarische Revue. 1893. Heft 10. 1894. Heft 1—4. gr. 8°.

K. Ungarisches geologisches Institut in Budapest:

Mittheilungen. Band X, Heft 4, 5. 1894. 8°.
A m. kir. Földtani intézet évkönyve. Bd. X, Heft 5. 1894. 8°.
Földtani Közlöny. Band XXXIII, Heft 9—12. Band XXXIV, 1—5. 1893/94. 8°.

Academia Romana in Bukarest:

Eudoxiu de Hurmuzaki, Documente privitóre la Istoria Românilor. Suppl. I, Vol. 5. Suppl. II, Vol. 1. Vol. II, part 4 und Vol. 8. 1893—94. 4°.
Analele. Serie II, Tom. XIV. Sect. literar. u. Sect. scientif. Tom. XV. Part. administrat. und Sect. literar. 1893. 4°.
Etymologicum Magnum Romaniae. Tom. III, 2. 1894. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:
Berichte. Band VII, 1, 2. Band VIII. 1893/94. 8⁰.

Universität Freiburg i. d. Schweiz:
Index lectionum per menses aestivos 1894. 8⁰.

Oeffentliche Bibliothek in Genf:
Compte rendu pour l'année 1893. 1894. 8⁰.

Institut national Genevois in Genf:
Les Chroniques de Genève par Michel Roset. 1894. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Genua:
Annali. Ser. 2a. Vol. XIII. 1893. 8⁰.

Geological Society in Glasgow:
Transactions. Vol. IX, part 2. 1893. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Neues Lausitzisches Magazin. Band 69, Heft 2. 1893. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:
Gelehrte Anzeigen. 1893. No. 20—26. 1894. No. 1—6. 8⁰.
Nachrichten. 1893. No. 15—21. 1894. No. 1, 2. 8⁰.

Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha:
65. Rechenschaftsbericht für das Jahr 1893—1894. 4⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville:
Journal. Vol. III, p. 163—182. Vol. IV, p. 1—72, No. I—LXXX. 1893. 8⁰.

Verein der Aerzte in Steiermark in Graz:
Mittheilungen. 30. Jahrgang. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:
Mittheilungen. 25. Jahrgang. 1893. Berlin 1894. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:
Jahresbericht 1893/94. 1894. 8⁰.

Haag'sche Genootschap tot verdediging van de christelijke Godsdienst im Haag:
Werken. VI. Reeks. Deel V. Leiden 1894. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:
Bijdragen. V. Reeks. Deel X, aflev. 1, 2. 1894. 8⁰.

Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:
Leopoldina. Heft 29, No. 21—24. Heft 30, No. 1—10. 1893—94. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:
Zeitschrift. Band 47, Heft 4. Band 48, Heft 1. Leipzig 1893/94. 8⁰.

Universität Halle:
Index lectionum per aestatem 1894 habendarum, nebst Verzeichniss der Vorlesungen. 1894. 4⁰.

Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:
Neue Mittheilungen. Band 18. 2. Hälfte, Heft 1. 1893. 8⁰.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:
Quartalblätter. 1893 in 4 Heften. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Davenport, Jowa:
Proceedings. Vol. V, part 2. 1893. 8⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:
3 kleine Schriften. 1893. 8⁰.
The Question of a Standard of Value, by O. J. Frost. 1893. 8⁰.
The Mode of occurrence of gold in the ores of the Cripple Creek District by Richard Pearce. 1894. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:
Mittheilungen. Band 6, Theil 4. 1893. 8⁰.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Dorpat:
Sitzungsberichte 1893. 1894. 8⁰.
Verhandlungen. Band XVI, 3. 1894. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:
Bulletin. Tom. 14. 3. et 4. trimestre 1893. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:
Proceedings. III. Ser. Vol. III, No. 1, 2. 1894. 8⁰.
Transactions. Vol. 30. part 5—12. 1893/94. 4⁰.

Royal Dublin Society in Dublin:
The scientific Transactions. Ser. II. Vol. IV, No. 14, Vol. V, No. 1—4. 1892—93. 4⁰.
The scientific Proceedings. N. Ser. Vol. VII, part 5. Vol. VIII, part 1, 2. 1892—93. 8⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:
Proceedings. Session 1891—92 and 1892—93. 2 Hefte. 1891—93. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:
Proceedings. Vol. XX, pag. 97—160. 1893. 8⁰.
Transactions. Vol. 37, part I, II. 1893. 4⁰.

Gymnasium in Eisenach:
Jahresbericht auf das Jahr 1893—94. 1894. 4⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:
Jahrbücher. N. F. Heft 20. 1894. 8⁰.

Reale Accademia de' Georgofili in Florenz:
Atti. Ser. IV. Vol. XVI, 3, 4. 1893. 8⁰.

R. Archivio di Stato in Florenz:
I Capitoli del Comune di Firenze, Inventario e Regesto. Tom. 2. 1893. 4⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a. M.:
Abhandlungen. Band XVIII, No. 2. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a. M.:
Mittheilungen über römische Funde in Heddernheim. I. 1894. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:
Helios. 11. Jahrg. No. 6—12. 1893/94. 8⁰.
Societatum Litterae. 1893. No. 8—12. 1894. 1—3. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:

Berichte. Band VII, 1. 2. Band VIII. 1893/94. 8°.

Universität Freiburg i. d. Schweiz:

Index lectionum per menses aestivos 1894. 8°.

Oeffentliche Bibliothek in Genf:

Compte rendu pour l'année 1893. 1894. 8°.

Institut national Genevois in Genf:

Les Chroniques de Genève par Michel Roset. 1894. 8°.

Museo civico di storia naturale in Genua:

Annali. Ser. 2a. Vol. XIII. 1893. 8°.

Geological Society in Glasgow:

Transactions. Vol. IX, part 2. 1893. 8°.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Band 69, Heft 2. 1893. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Gelehrte Anzeigen. 1893. No. 20—26. 1894. No. 1—6. 8°.
Nachrichten. 1893. No. 15—21. 1894. No. 1, 2. 8°.

Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha:

65. Rechenschaftsbericht für das Jahr 1893—1894. 4°.

The Journal of Comparative Neurology in Granville:

Journal. Vol. III, p. 163—182. Vol. IV, p. 1—72, No. I—LXXX. 1893. 8°.

Verein der Aerzte in Steiermark in Graz:

Mittheilungen. 30. Jahrgang. 1893. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mittheilungen. 25. Jahrgang. 1893. Berlin 1894. 8°.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:

Jahresbericht 1893/94. 1894. 8°.

Haag'sche Genootschap tot verdediging van de christelijke Godsdienst im Haag:

Werken. VI. Reeks. Deel V. Leiden 1894. 8°.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. V. Reeks. Deel X. aflev. 1. 2. 1894. 8°.

Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 29. No. 21—24. Heft 30. No. 1—10. 1893—94. 4°.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 47. Heft 4. Band 48. Heft 1. Leipzig 1893/94. 8°.

Universität Halle:

Index lectionum per aestatem [illegible] [illegible] [illegible] der Vorlesungen. 1894. 8°.

Thüringisch-Sächsischer Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:

Neue Mittheilungen. Band [illegible], 2. Hälfte. Heft 1. 1894. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 66. Heft 3, 4. Leipzig. 1893. 8°.

Stadt-Bibliothek in Hamburg:
Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1892/93. 4°.
Handbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Arbeiten. IX. Jahrg. 1891. I. und II. Hälfte. X. Jahrg. 1892. I. Hälfte nebst Beiheft. 1891—93. 4°.
Mittheilungen aus der Stadtbibliothek. X, 1. 1893. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:
Verhandlungen III. Folge I. 1894. 8°.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:
Zeitschrift. Jahrgang 1893. 8°.

Teylers Godgeleerd Genootschap in Harlem:
Verhandelingen. Nieuwe Serie. Deel XIV. 1894. 8°.

Teylers tweede Genootschap in Harlem:
Verhandelingen. N. Reeks. Deel IV, stuk 2. 1893. 8°.
Jacob Dirks, Atlas behoorende bij de beschrijving der Nederlandsche Penningen. Stuk 4. 1893. fol.

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:
Archives Néerlandaises. Tom. 27, livr. 4, 5. Tom. 28, livr. 1. 1894. 8°.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:
Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrgang 4. Heft 1. 1894. 8°.

Naturhistorisch-medicinischer Verein in Heidelberg:
Verhandlungen. N. F. Band V, Heft 2. 1894. 8°.

Institut météorologique central in Helsingfors:
Observations. Vol. VI—VIII, livr. I. Vol. XI, livr. I. 1893. 4°.
Observations météorologiques 1881—1888 in 4 Voll. Kuopio. 1893. fol.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:
Archiv. N. F. Band 25, Heft 1. 1894. 8°.
Jahresbericht für das Vereinsjahr 1892/93. 1893. 8°.
Die Kerzer Abtei, von Lud. Reissenberger. 1894. 4°.

Historischer Verein in und für Ingolstadt:
Sammelblatt. XVIII. Heft. 1893. 8°.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Band 28, Heft 2, 3. 1893—94. 8°.

Kais. Universität in Kasan:
Utschenia Sapiski. Vol. 61, No. 1—3. 1894. 8°.
2 Dissertationen von Krasin und Agababon. 1893. 8°.

Verein für Naturkunde in Kassel:
39. Bericht über die Jahre 1892—94. 1894. 8°.

Universität in Kharkow:
Sapiski. Vol. 4. 1893. 8°.
Annales. 1894. Fasc. 1. 8°.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. 20, livr. 1. 2. 1892/93. 8⁰.

Universität in Lund:

Acta universitatis Lundensis. Tom. 29, Abth. I, II. 1892/93. 4⁰.

Institut Grand-Ducal in Luxemburg:

Publications. Tom. XXII. 1893. 8⁰.

Université in Lyon:

Annales. Tom. VI, fasc. 3, 4. Paris 1893 und Lyon 1894. 8⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:

Transactions. Vol. IX, part 1, 2. 1893. 8⁰.

Washburn Observatory in Madison:

Publications. Vol. VIII. 1893. 4⁰.

The Government Astronomer in Madras:

Madras Meridian. Circle Observations. Vol. VII. 1894. 4⁰.

Real Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo XXIV, No. 1—6. 1894. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio storico Lombardo. Anno XX, fasc. 4. 1893.
" " " Serie III. Anno XXI, fasc. 1, 1894. 8⁰.

Società italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 34, fasc. 4. 1894. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 7, No. 2, 3. Vol. 8, No. 1, 2. 1893/94. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. 3, fasc. 4. 1894. 4⁰.

Tuft's College in Massachusetts:

Tufts College Studies No. 1. 1894. 8⁰.

Hennebergischer alterthumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Alterthums. Lief. 12. 1893. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Festschrift zur Feier ihres 350jährigen Bestehens. 1894. 4⁰.

Scientific Association in Meriden:

Transactions. Vol. 5. 1893. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. 3. Série. Année 20. 1890—1891. 1893. 8⁰.

Gesellschaft für Lothringische Geschichte und Altertumskunde in Metz:

Jahrbuch. 5. Jahrg. 1893. I. Hälfte. 8⁰.

Observatorio meteorologico central in México:

El Clima de la ciudad de México por Mariano Bárcena. 1893. 8⁰.

Sociedad científica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias y Revista. Vol. VII, No. 3—10. 1893/94. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. Neue Folge. Band 48, Heft 8—12.
„ 49, „ 2—9. 1893/94. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mittheilungen 1893. 1894. 8⁰.

Museum Franisco-Carolinum in Linz:

52. Bericht. 1894. 8⁰.

Société philosophique in Loewen:

Revue Néo-Scolatisque. I. Année, No. 1. 1894. 8⁰.

Université catholique in Loewen:

Annuaire 1894. 8⁰.
Recueil de travaux publiés par les membres de la conférence d'histoire. Fasc. 4, 5. 1891—1893. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule, Recueil de Cytologie et d'histologie générale. Tom. X, fasc. 1. 1894. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. 14, part I. 1894. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Review. Vol. IX, No. 33, 34. 1894. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 54, No. 328, 329, 330. Vol. 55, No. 331, 332, 333. 1894. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 54, No. 2—7. 1893/94. 8⁰.

Chemical Society in London:

Proceedings. Session 1893—94. No. 131—140. 1894. 8⁰.
Journal 1893. Supplement Number. 1894. No. 374—379. (Jan. bis June.) 8⁰.
List of the Officers and Fellows, April 1894. 8⁰.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 49, part 1—4. 1893. 8⁰.
List. November 1st 1893. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 57. 1892. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1894, part 1-3. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1893, part IV. 1894, part I. 8⁰.
Transactions. Vol. 13, part 8. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 49, No. 1255—1267, 1269, 1271—1278. Vol. 50, No. 1279—1284. 1893/94. 4⁰.

R. Accademia delle scienze in Lucca:

Atti. Tom. 27. 1893. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. 20, livr. 1. 2. 1892/93. 8⁰.

Universität in Lund:

Acta universitatis Lundensis. Tom. 29, Abth. I. II. 1892/93. 4⁰.

Institut Grand-Ducal in Luxemburg:

Publications. Tom. XXII. 1893. 8⁰.

Université in Lyon:

Annales. Tom. VI, fasc. 3, 4. Paris 1893 und Lyon 1894. 8⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:

Transactions. Vol. IX, part 1. 2. 1893. 8⁰.

Washburn Observatory in Madison:

Publications. Vol. VIII. 1893. 4⁰.

The Government Astronomer in Madras:

Madras Meridian. Circle Observations. Vol. VII. 1894. 4⁰.

Real Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo XXIV, No. 1—6. 1894. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio storico Lombardo. Anno XX, fasc. 4. 1893.
" " " Serie III. Anno XXI, fasc. 1, 1894. 8⁰.

Società italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 34, fasc. 4. 1894. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 7, No. 2, 3. Vol. 8, No. 1, 2. 1893/94. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. 3. fasc. 4. 1894. 4⁰.

Tuft's College in Massachusetts:

Tufts College Studies No. 1. 1894. 4⁰.

Hennebergischer alterthumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Alterthums. Lief. 12. 1893. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Festschrift zur Feier ihres 350jährigen Bestehens. 1894. 4⁰.

Scientific Association in Meriden:

Transactions. Vol. 5. [illegible]. [illegible].

Académie in Metz:

Mémoires. 3. série. Année [illegible]. [illegible]. [illegible].

Gesellschaft für Lothringische Geschichte und Altertumskunde in Metz:

Jahrbuch. 5. Jahrg. [illegible]. 2. Hälfte. [illegible].

Observatorio meteorológico central in Mexico:

El Clima de la [illegible] de Mexico por [illegible]. [illegible]. [illegible].

Sociedad científica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias y Revista. [illegible]. [illegible]. [illegible].

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Serie. Vol. II, cuad. 3 y 4. 1892. fol.

Regia Accademia di scienze in Modena:

Memorie. Serie II, Vol. 9. 1893. 4⁰.

Benediktiner-Abtei in Montecassino:

Pauli Warnefridi in sanctam regulam comment. 1880. 4⁰.
Spicilegium Casinense. Tomus I. 1893. fol.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1893, No. 4. 1894, No. 1. 1894. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Korrespondenzblatt. 1893. No. 11, 12. 1894. No. 1—5. 4⁰.

K. Technische Hochschule in München:

Personalstand. Somm.-Sem. 1894. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel in München:

Amtsblatt für die Erzdiöcese. 1893. 1894. No. 1—12. 8⁰.
Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1894. 8⁰.

Universität in München:

Schriften der Universität München. 1893. 4⁰ u. 8⁰.

Historischer Verein von Oberbayern in München:

Monatsschrift. 1894. No. 1—5. (Jan.—Juni.) 8⁰.

Kaufmännischer Verein München:

20. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Band 51. 1893. 8⁰.
Ergänzungshefte. I. Lieferung 1. 1893. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconti. Serie 2a. Vol. VII, fasc. 8—12. Vol. VIII, fasc. 1—5. 1893/94. 4⁰.

Historischer Verein in Neuburg:

Neuburger Kollektaneen-Blatt. Jahrg. 56. 1892. 1893. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in Newcastle-upon-Tyne:

Transactions. Vol. 42, part 5. Vol. 43, part 2, 3, 4. 1893. 8⁰.
An Account of the Strata of Northumberland and Durham. S-T. 1894. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. Vol. 47, No. 277—282 (Jan.—June). 1894. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XVI, No. 1. 1894. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. VIII, No. 1—3. Vol. VII, 6—12.
Vol. VI. Index 1894. 1893/94. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. V. 1893. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Memorie. Vol. XIII. 1894. 4⁰.
Atti. Processi verbali. Vol. IX, pag. 1—61. 1894. 4⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht über d. J. 1893/94. 4⁰.

Historische Gesellschaft für die Provinz Posen in Posen:

Zeitschrift. Jahrg. 7 u. 8. 1892—93. 8⁰.
Sonder-Veröffentlichungen. I, 1, 2. II. 1892—93. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band IX. 1894. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef Akademie der Wissenschaften, Litteratur und Kunst in Prag:

Almanach. Ročník IV. 1894. 8⁰.
Rozprawy (Sitzungsberichte). 1893. Abth. I, II, III. 1894. Třída I. Ročník 3. Číslo 1, 2. Třída II. Ročník 3. 4⁰.
Rozprawy (Abhandlungen). Abth. III. 1893. I. 1894. 4⁰.
Historický Archiv. Číslo 2. 1893/94. 4⁰.
Věstník. Band II. Heft 1—9. Band III. Heft 1—5. 1893/94. 8⁰.
Antonín Pavlíček, Právo listů zástavních (Das Recht der Hypothekenbriefe). 1893. 8⁰.
Sbírka pramenův ku poznáni literárního života (Sammlung der Quellen zur Kenntniss des literar. Lebens in Böhmen, Mähren und Schlesien). No. 1. 1893. 8⁰.
Otakar Kukula, O lithiasi (Von der Steinoperation). 1894. 8⁰.
Bulletin international. Classe des sciences mathématiques. I. 1894. 4⁰.
Antonín Veselý. Medicinská Rus. 1894. 4⁰.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Sitzungsberichte: a) Klasse für Philosophie 1893.
b) Mathem.-naturwissensch. Klasse 1893. 1894. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1893. 1894. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen zu Prag:

Rechenschaftsbericht vom 11. Dezember 1893. 8⁰.
Georg Bruder, Die Gegend um Saaz. Saaz 1893. 8⁰.
Aliscans mit Berücksichtigung von Wolframs von Eschenbach Willehalm, hsg. von Gustaf Rollin. Leipzig. 1894. 8⁰.
Mittheilung. No. II. 1894. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Casopis. Band 23, No. 1, 2. 1893/94. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht. Jahr 1893. 1894. 8⁰.

K. böhmisches Museum in Prag:

Casopis. Band 67. Heft 1—4. 1893. 8⁰.

K. K. deutsche Universität in Prag:

Ordnung der Vorlesungen. Somm.-Sem. 1894. 8⁰.

Kaiserl. Russ. Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg:

Mémoires. Tom. 41, No. 2-5. 1893. 4⁰.
Repertorium für Meteorologie. Band XVI. 1893. 4⁰.

Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. 13, fasc. 1. 1893. 8⁰.
Scripta botanica. Tom. IV, fasc. 1. 1893. 8⁰.

Kais. russ. archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Sapiski. Vol. 6. Heft 1—4. Vol. 8. Heft 1, 2. 1892/93. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der k. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 25, No. 9. Tom. 26, No. 1—3. 1893/94. 8⁰.
Zum 25jähr. Jubiläum der chem. Abteilung der physikalisch-chem. Gesellschaft (in russ. Sprache). 1894. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1892. Theil I, II. 1893. 4⁰.

Société des naturalistes in St. Petersburg:

Travaux. Tom. 24, Heft 1, 2. 1894. 8⁰.

Sternwarte in St. Petersburg:

Publications de l'Observatoire Central Nicolas. Série II, Vol. I. 1893. fol.
Observations de Poulkova. Vol. 10. 1893. fol.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Protokoly No. 48, 49. 1893/94. 8⁰.
Goditschnyi akt (Jahres-Akt) 8. Februar 1894. 8⁰.
P. Kokowzow, Zur Geschichte der mittelalterlichen Philologie und arab.-hebräischen Literatur. Band I. 1893. 8⁰.
A. Domogarow, Von der freien Bewegung des Gyroskops. 1893. 8⁰.
(Beide Schriften in russischer Sprache.)

Historisch-philolog. Fakultät der Universität St. Petersburg:

Sapiski. Tom. 33. Tom. 25, pars II. 1893 u. 1894. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1893. Part II, III. 8⁰.
Journal. II. Ser. Vol. X, part 1. 1894. gr. 4⁰.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings at the 41th annual Meeting, Chicago August 1893. 8⁰.

The Geographical Club of Philadelphia:

Charter, By-laws, List of Members. Bulletin Vol. 1, No. 2. 1894. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine. Vol. XVII, No. 3, 4. 1893/94. 8⁰.

American philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 31, No. 142. 1893. 8⁰.

University of Pennsylvania in Philadelphia:

Catalogue 1893—1894. 1893. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Memorie. Vol. XIII. 1894. 4⁰.
Atti. Processi verbali. Vol. IX, pag. 1—61. 1894. 4⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht über d. J. 1893/94. 4⁰.

Historische Gesellschaft für die Provinz Posen in Posen:

Zeitschrift. Jahrg. 7 u. 8. 1892—93. 8⁰.
Sonder-Veröffentlichungen. I, 1, 2. II. 1892—93. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band IX. 1894. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef Akademie der Wissenschaften, Litteratur und Kunst in Prag:

Almanach. Ročník IV. 1894. 8⁰.
Rozprawy (Sitzungsberichte). 1893. Abth. I, II, III. 1894. Třída I. Ročník 3. Číslo 1, 2. Třída II. Ročník 3. 4⁰.
Rozprawy (Abhandlungen). Abth. III. 1893. I. 1894. 4⁰.
Historický Archiv. Číslo 2. 1893/94. 4⁰.
Věstník. Band II. Heft 1—9. Band III. Heft 1—5. 1893/94. 8⁰.
Antonín Pavlíček, Právo listů zástavních (Das Recht der Hypothekenbriefe). 1893. 8⁰.
Sbírka pramenův ku poznáni literárního života (Sammlung der Quellen zur Kenntniss des literar. Lebens in Böhmen, Mähren und Schlesien). No. 1. 1893. 8⁰.
Otakar Kukula, O lithiasi (Von der Steinoperation). 1894. 8⁰.
Bulletin international. Classe des sciences mathématiques. I. 1894. 4⁰.
Antonín Veselý. Medicinská Rus. 1894. 4⁰.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Sitzungsberichte: a) Klasse für Philosophie 1893.
b) Mathem.-naturwissensch. Klasse 1893. 1894. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1893. 1894. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen zu Prag:

Rechenschaftsbericht vom 11. Dezember 1893. 8⁰.
Georg Bruder, Die Gegend um Saaz. Saaz 1893. 8⁰.
Aliscans mit Berücksichtigung von Wolframs von Eschenbach Willehalm, hsg. von Gustaf Rollin. Leipzig. 1894. 8⁰.
Mittheilung. No. II. 1894. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Casopis. Band 23, No. 1, 2. 1893/94. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht. Jahr 1893. 1894. 8⁰.

K. böhmisches Museum in Prag:

Casopis. Band 67. Heft 1—4. 1893. 8⁰.

K. K. deutsche Universität in Prag:

Ordnung der Vorlesungen. Somm.-Sem. 1894. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. 31. Jahrg. No. 1—4. 1892—93. 8⁰.

Instituto historico e geographico in Rio de Janeiro:

Revista trimensal. Tom. 55, parte II. 1893. 8⁰.

Homenagem. Sessão extraordinaria em commemoração do fallecimento de S. M. o. Snr. D. Pedro II. 1892. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario 1893. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. IV. 1893. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario 1894. 8⁰.

Atti. Serie IV. Classe di scienze morali. Vol. IX, parte 1 e Vol. X, p. I. Memorie. 1893. 4⁰.

Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. I, parte 2. Notizie degli scavi 1893, Agosto—Dicembre e Indice per l'anno 1893. 1893. 4⁰.

Atti. Serie V. Classe di scienze fisiche. Vol. II, semestre II, fasc. 1, 2. Vol. III, semestre I, fasc. 1—11. 1893/94. 4⁰.

Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. II, fasc. 11, 12. Vol. III, fasc. 1—4. 1894. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 45, Sessione III—VI. Anno 46, Sessione I—VIII. 1892/93. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. 1893, No. 4. 1894, 1. 1893/94. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut, röm. Abtheilung, in Rom:

Mittheilungen. Band 8, No. 4. Band 9, No. 1. 1894. 8⁰.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:

Le Opere di Galileo Galilei. Vol. IV. Firenze 1894. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XVI, fasc. 3, 4. 1893. 8⁰.

Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte in Rotterdam:

Nieuwe Verhandelingen. II. Reeks, IV. Deel. Stuk I. 1893. 4⁰.

Accademia degli Agiati in Rovereto:

Atti. Anno I—XI. (1883—1893.) 1893/94. 8⁰.

L'Accademia di Rovereto dal 1750 al 1880. 1882. 8⁰

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht über d. J. 1892/93. 1893. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Annales. Seccion II. Año 1892. 1893. fol.

California Academy of sciences in San Francisco:

Memoirs. Vol. II, No. 3. 1894. 4⁰.

Société scientifique du Chili in Santiago:

Actes. Tom. III, livr. 1—3. 1893/94. 4⁰.

Bosnisch-Herzegowinisches Landesmuseum in Sarajevo:

Wissenschaftliche Mittheilungen. Band I, II. Wien. 1893—94. 8⁰.

Verein für meklenburgische Geschichte in Schwerin:

Mecklenburgisches Urkundenbuch. Band XVI. 1893. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bulletino di archeologia. Anno XVI, No. 11, 12. XVII, No. 1—4. 1893/94. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speier:

Mittheilungen. XVII. 1893. 8⁰.

Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Stettin:

Baltische Studien. 43. Jahrg. 1893. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Observations du magnétisme terrestre faites à Upsala en 1882—1883. 1893. 4⁰.

Meteorologiska iakttagelser i Sverige. Band 31 (1889). 1893. 4⁰.

Öfversigt. Årgang 50 (1893). 1894. 8⁰.

Carl von Linnés brefvexling, af Ewald Ährling. 1894. 8⁰.

Institut Royal Géologique de Suède in Stockholm:

Carte géologique de la Suède. Série Aa, No. 108, 109. Série Ab, No. 13—15, Série Bb, No. 7, Série C, No. 112.

Nordisches Museum in Stockholm:

Samfundet för Nordiska Museets främjando 1891 och 1892. 1894. 8⁰.

Träsniderimönster i Allmogestil af Wilhelm Oldenburg. 1893. fol.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. XXVII, 1893, No. 10. Tom. XXVIII, 1894. Fasc. 1—4. 8⁰.

K. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher. Jahrg. 1893. 4⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. II. Jahrg. 1893. Heft 1—4. 1893. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture in Sydney:

Records of the Geological Survey of N.-South-Wales. Vol. III, part 4. 1893. 4⁰.

Annual Report for 1893. 1894. fol.

The New-South Wales Government Bard for international exchanges in Sydney:

The year Book of Australia 1894. 8⁰.

Royal Society of New-South Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. XXVII. 1893. 8⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico):

Anuario. Año de 1894.

Boletín. Tom. I, No. 15. 16. 1893/94. 4⁰.



Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio (Japan):

Mittheilungen. Heft 53. 1894. 4°.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. IV, part 1. 1894. 8°.
7th annual Report. 1894. 8°.

Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XI, fasc. 2. 1893. 8°.

Società Adriaticà di scienze naturali in Triest:

Bolletino. Vol. XV. 1893. 8°.

Korrespondenzblatt für die Gelehrten und Realschulen Württembergs in Tübingen:

Korrespondenzblatt. 40. Jahrg. Heft 7, 8. Tübingen 1893. 8°.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Memorie. Ser. II, Vol. 43. 1893. 4°.
Osservazioni meteorologiche, anno 1893. 1894. 8°.
Atti. Vol. 29, disp. 1—10. 1893—94. 8°.

Universität in Upsala:

De l'emploi des photogrammètres pour mesurer la hauteur des nuages, par Ph. Akerblom. 1894. 8°.
Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique. Vol. 25, année 1893. 1893—94. fol.

Historisch Genootschap in Utrecht:

F. de Bas, Brieven van Prins Willelm V. s'Gravenhage 1893. 8°.
Werken. III. Serie, No. 1. s'Gravenhage 1893. 8°.

Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen, IV. Reeks. Deel 3, aflev. 1. 1894. 8°.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Temi di premio proclamati il 20 maggio 1894. 8°.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol. VI, part I, II. 1893. 4°.

Bureau of Education in Washington:

Report for 1889—1890. 2 Vols. 1893. 8°.

Bureau of Ethnology in Washington:

Bibliography of the Salishan Languages, by F. Const. Pilling. 1893. 8°.
Ninth annual Report 1887—1888. 1892. 4°.
Museum of comparative zoology. Vol. 25, No. 4. 1894. 8°.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report for the year 1890/91. 1893. 8°.
The internal Work of the Wind. By S. P. Langley. 1893. 4°.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report for the year 1892—93. 1893. 8°.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Bulletin No. 28—30. 1893—94. 8°.
Annual Report for the year 1891. Part II. 1892. 8°.

Harzverein für Geschichte u. Wernigerode:

Zeitschrift. 26. Jahrg. 1893. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein des Harzes in Wernigerode:

Schriften. 8. Jahrgang 1893. 8°.

K. K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. philos.-hist. Classe. Bd. 125. 1893. 8°.
" mathem.-naturwissensch. Classe.
Abtheilung I. 1893. Nr. 1—7. Abth. IIa. 1893. Nr. 1—7. } 1893. 8°.
IIb. 1893. " 1—7. " III. 1893. " 1—7. }

Denkschriften. Philosophisch-historische Classe. Bd. 42. 1893. 4°.

Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 79. II. 79. I. II. 80. I. 1893. 8°.

Almanach. 43. Jahrg. 1893. 8°.

Mittheilungen der prähistor. Kommission. Bd. I. Nr. 3. 1893. 4°.

14 Stück Separat-Abdrücke aus den Sitzungsberichten der philos.-hist. Classe. 1893. 8°.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1892. Heft 4. 1893. Band 43. Heft 2—4. 1894. Heft 4. 1893/94. 4°.

Abhandlungen. Band XV. Heft 4—6
" VI. II. Hälfte: Text und Tafeln.
" XVII. Heft 1. 1893. fol.

Verhandlungen. 1893. Nr. 11—18. 1894. Nr. 1—4. 4°.

K. K. Gradmessungs-Bureau in Wien:

Astronomische Arbeiten. Band V. 1893. 4°.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift 1894. Nr. 1—26. 4°.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXIII. Heft 6. Bd. XXIV. Heft 1. 2. 1893/94. 4°.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 36. 1893. 8°.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Jahrg. 1893. Bd. 43. Quartal III u. IV. 1893. 8°.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band VIII. No. 3. 4. Band IX. Nr. 1. 1893/94. 4°.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:

Annalen. Band VIII u. IX. 1892/93. 4°.

Verein für Nassauische Alterthumskunde in Wiesbaden:

Annalen. Band 26. 1894. 8°.

Magnetisches Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven:

Beobachtungen. Band I. II. III. Berlin. 1890—93. 4°.

Bestimmung der erdmagnetischen Elemente. von M. Eschenhagen. Berlin. 1890. 4°.

Erdmagnetische Beobachtungen zu Wilhelmshaven. von M. Eschenhagen. Hamburg. 1893. 4°.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Sitzungsberichte. Jahrg. 1893. No. 7—9, 11, 12. 1894. No. 1—4. 8°.
Verhandlungen. N. F., Band 27, No. 5. Band 28, No. 1. 1893/94. 8°.

Schweizerische meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen. 28. Jahrgang 1891. (1894.) 4°.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mittheilungen. Band 23, Heft 6. Leipzig 1894. 4°.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Zürich:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 19. Band. 1894. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrschrift. Jahrg. 38, Heft 3, 4. Jahrg. 39, Heft 1. 1893/94. 8°.

Schweizerische geodätische Kommission in Zürich:

Das schweizerische Dreiecksnetz. Band VI. 1894. 4°.

Universität Zürich:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1893/94. 4° u. 8°.

Von folgenden Privatpersonen:

Gabriel Arnoux in Paris:

Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques. 1894. 8°.

Dr. Beck in Klosterwald, Post Ottobeuren:

Die römischen Strassen Regensburgs. Ottobeuren 1894. 8°.

Constantin Chiru in Bukarest:

Canalisarca rîurilor si irigatiunič. 1893. 8°.

Hermann Escher in Zürich:

Georg v. Wyss, Zwei Nekrologe von Paul Schweizer und Hermann Escher. 1894. 8°.

H. Fritsche in St. Petersburg:

Die magnetischen Lokalabweichungen bei Moskau. 1893. 8°.

Paul Galopin in Genf:

Effets thermiques dus à la compression. Thèse. 1893. 4°.

Hugo Gyldén in Stockholm:

Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales. Tom. I. 1893. 4°.

H. Haug in Gotha:

Vergleichende Erdkunde und alttestamentlich geographische Weltgeschichte. Text- und Kartenheft. 1894. 4°.

J. G. Isola in Genua:

Storia delle lingue e litterature romanze. Parte III, disp. 2. Genova 1894. 8°.

Joseph B. Jack in Konstanz:

Carl Moriz Gottsche. 1893. 8°.
Stephaniella paraphyllina Jack nov. gen. Hepaticarum. 1894. 8°.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 3. November 1894.

1. Herr Robert Hartig hält einen Vortrag: „über die Verschiedenheiten im Bau des Eichenholzes“.

2. Herr E. v. Lommel legt eine Notiz des Herrn Professor Max Planck in Berlin: „über den Beweis des Maxwellschen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen“ vor.

3. Herr P. Groth bespricht und überreicht eine Arbeit des Herrn Privatdocenten Dr. Ernst Weinschenk: „Beiträge zur Petrographie der östlichen Centralalpen speciell des Gross-Venedigerstockes“.

a) Ueber die Peridotite und die aus ihnen hervorgegangenen Serpentingesteine. Genetischer Zusammenhang derselben mit den sie begleitenden Minerallagerstätten,

b) Ueber das granitische Centralmassiv und die Beziehungen von Granit und Gneiss.

Beide Abhandlungen sollen in den Denkschriften veröffentlicht werden.

B. Schwalbe in Berlin:

Die wissenschaftliche Fachliteratur. 1894. 8°.

Ferdinando Colonna dei Principi di Stigliano in Neapel:

Le grotte del Monte Taburno. Memoria 2da. 1889. 8°.
Noticie storiche di Castelnuove in Napoli. 1892. 4°.

V. Thomsen in Kopenhagen:

Déchiffrement des inscriptions de l'Orkhon. 1894. 8°.

August Tischner in Leipzig:

Le Mouvement universel. 1893. 8°.

Victor Ritter von Tschusi zu Schmidhoffen in Hallein:

Meine bisherige literarische Thätigkeit 1865—1893. 1894. 8°.

Giuseppe Vincenti in Ivrea:

L'insegnamento del sistema fonografico universale a mano. Torino 1890. 8°.
La fonografia universale Michela. Torino 1893. 4°.

M. E. Wadsworth in Houghton:

A Paper on the Michigan Mining School. Lansing 1894. 8°.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. No. 83. 1894. 4°.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 3. November 1894.

1. Herr Robert Hartig hält einen Vortrag: „über die Verschiedenheiten im Bau des Eichenholzes“.

2. Herr E. v. Lommel legt eine Notiz des Herrn Professor Max Planck in Berlin: „über den Beweis des Maxwellschen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen“ vor.

3. Herr P. Groth bespricht und überreicht eine Arbeit des Herrn Privatdocenten Dr. Ernst Weinschenk: „Beiträge zur Petrographie der östlichen Centralalpen speciell des Gross-Venedigerstockes“.

a) Ueber die Peridotite und die aus ihnen hervorgegangenen Serpentingesteine. Genetischer Zusammenhang derselben mit den sie begleitenden Minerallagerstätten,

b) Ueber das granitische Centralmassiv und die Beziehungen von Granit und Gneiss.

Beide Abhandlungen sollen in den Denkschriften veröffentlicht werden.



von Reservestoffen und für Wasserleitung ganz besonders geeignet.

Zahl und Breite der Markstrahlen sind bei den Eichen derselben Art ausserordentlich verschieden und hängt deren procentischer Antheil am Holze von der Grösse der Baumkrone und dem Maasse der Lichtwirkung auf diese ab. Eine grosskronige 270jährige Eiche des Mittelwaldes in freier Stellung besass 22 % Ast- und Reisigholz und im Holz des unteren Stammtheiles 11 % Markstrahlen, eine ebenso alte schwachkronige Eiche mit nur 7.5 % Ast- und Reisholz dagegen nur 5 % Markstrahlen. Eine völlig freistehende 70jährige Eiche hatte 11 % Markstrahlen, eine fast ebenso alte Eiche im geschlossenen Bestande nur 4 %. Erfahrungsgemäss tragen freistehende Eichen mit grossen Kronen häufiger und reichlicher Eicheln, als schwachkronige Bäume im geschlossenen Bestande, da sie einen grösseren Procentantheil ihrer jährlichen Production in Form von Ueberschüssen als Reservestoffe aufzuspeichern vermögen.

Die Entwicklung des Leitungsgewebes hängt von der Verdunstungsgrösse des Baumes ab. Erzeugt ein Baum nur so viel organische Substanz, als erforderlich für die Ausbildung des Leitungsgewebes ist, so entsteht überhaupt kein Festigungsgewebe. Je günstiger der Ernährungszustand des Baumes im Vergleich zu seiner Verdunstungsgrösse ist, um so mehr Festigungsgewebe wird von ihm erzeugt. Das Festigungsgewebe stellt gewissermassen den Ueberschuss der Production an Bildungsstoffen über den Bedarf an Leitungsgewebe dar, insoweit derselbe nicht zur Herstellung von Speichergewebe und Reservestoffen verbraucht wird. Auf nahrkräftigem Boden wird desshalb mehr Festigungsgewebe gebildet, als auf magerem Boden. Die Breitringigkeit ist desshalb aber noch kein sicheres Zeichen für die Güte des Holzes. Freistehende Bäume mit sehr grosser Krone und Blattmenge verdunsten so viel Wasser, dass oft der grösste

Lebensjahre nimmt die Grösse der neu entstehenden Organe zu. Da nun besonders das Lumen der Gefässe an Grösse zunimmt, so erklärt sich schon daraus theilweise die Abnahme des Holzgewichtes mit zunehmendem Baumalter. Der Antheil, den das Markstrahlgewebe am Holze nimmt, ist in der Jugend ein geringer, er wächst bis über das hundertste Lebensjahr und bleibt von da an mehrere Jahrhunderte hindurch ziemlich gleich gross. Der Vorrath an aufgespeicherten Reservestoffen erreicht also etwa im hundertsten Jahre ein Maximum. Wahrscheinlich steht damit der so späte Eintritt der Mannbarkeit der Eiche im Zusammenhange.

Das meiste Festigungsgewebe entsteht im Baume da, wo dieser den grössten Widerstand gegen Sturm u. s. w. leisten muss, d. h. am untersten Stammende und im Wurzelanlaufe. Stammaufwärts vermindert sich der procentische Antheil, den das Festigungsgewebe am Holzringe ausmacht, bis zum Kronenansatze dann, wenn der Querschnitt des Jahrringes nach oben kleiner wird. Das Leitungsgewebe bleibt sich in den verschiedenen Baumhöhen bis zur Krone mit Schwankungen ziemlich gleich und so muss, wenn der Querschnitt des Ringes sich verkleinert, das Festigungsgewebe abnehmen.

Aehnliches habe ich schon früher für andere Holzarten nachgewiesen. Es wird dadurch erklärt, dass bei Windbruchschäden die Bäume meist unterhalb der Krone abbrechen.

Die grossen Markstrahlen nehmen im Baume von oben nach unten zu und erreichen ihr Maximum in den Wurzeln. So betragen dieselben z. B. in dem Gipfel des Baumes 3%, am Stammende 12% und in den Wurzeln 22% vom ganzen Holzkörper. Mit Ausschluss des Wurzelanlaufes enthalten die Wurzeln nur Speicher- und Leitungsgewebe. Das Festigungsgewebe fehlt ganz. Sie bleiben auch stets ohne Kern und sind in Folge dessen für Speicherung

von Reservestoffen und für Wasserleitung ganz besonders geeignet.

Zahl und Breite der Markstrahlen sind bei den Eichen derselben Art ausserordentlich verschieden und hängt deren procentischer Antheil am Holze von der Grösse der Baumkrone und dem Maasse der Lichtwirkung auf diese ab. Eine grosskronige 270jährige Eiche des Mittelwaldes in freier Stellung besass 22 % Ast- und Reisigholz und im Holz des unteren Stammtheiles 11 % Markstrahlen, eine ebenso alte schwachkronige Eiche mit nur 7.5 % Ast- und Reisholz dagegen nur 5 % Markstrahlen. Eine völlig freistehende 70jährige Eiche hatte 11 % Markstrahlen, eine fast ebenso alte Eiche im geschlossenen Bestande nur 4 %. Erfahrungsgemäss tragen freistehende Eichen mit grossen Kronen häufiger und reichlicher Eicheln, als schwachkronige Bäume im geschlossenen Bestande, da sie einen grösseren Procentantheil ihrer jährlichen Production in Form von Ueberschüssen als Reservestoffe aufzuspeichern vermögen.

Die Entwicklung des Leitungsgewebes hängt von der Verdunstungsgrösse des Baumes ab. Erzeugt ein Baum nur so viel organische Substanz, als erforderlich für die Ausbildung des Leitungsgewebes ist, so entsteht überhaupt kein Festigungsgewebe. Je günstiger der Ernährungszustand des Baumes im Vergleich zu seiner Verdunstungsgrösse ist, um so mehr Festigungsgewebe wird von ihm erzeugt. Das Festigungsgewebe stellt gewissermassen den Ueberschuss der Production an Bildungsstoffen über den Bedarf an Leitungsgewebe dar, insoweit derselbe nicht zur Herstellung von Speichergewebe und Reservestoffen verbraucht wird. Auf nahrkräftigem Boden wird desshalb mehr Festigungsgewebe gebildet, als auf magerem Boden. Die Breitringigkeit ist desshalb aber noch kein sicheres Zeichen für die Güte des Holzes. Freistehende Bäume mit sehr grosser Krone und Blattmenge verdunsten so viel Wasser, dass oft der grösste

Theil der erzeugten Bildungsstoffe zur Ausbildung von Leitungsgewebe verwendet werden muss. In einem geschlossenen Eichenbestande besitzen die breitringigen, am schnellsten gewachsenen Bäume fast nie das schwerste Holz, vielmehr findet sich dies bei denjenigen Eichen, deren Krone seitlich eingeengt ist und desshalb weniger verdunstet. Die Bäume mit voller, hoher Krone besitzen in der Regel einen Ueberfluss an verdunstenden Blättern, deren Assimilationsenergie durch Mangel an Nährstoffzufuhr aus dem Boden nicht zur Maximalhöhe gesteigert ist. Durch eine nicht zu weit gehende Entnahme belaubter Aeste wird die verbleibende Blattmenge zu voller Productionsthätigkeit befähigt. Die Menge der erzeugten Substanz bleibt dieselbe, die sie vor der Ausästung war, das nunmehr entstehende Holz zeigt aber weniger Leitungsgewebe und entsprechend mehr Festigungsgewebe, da mit der Entnahme von Blättern die Verdunstungsgrösse sich vermindert hat.

Specifische Verschiedenheiten im anatomischen Bau des Holzes der Traubeneiche und der Stieleiche liessen sich nicht erkennen, da alle Merkmale, die man bisher benutzt hat, um solche festzustellen, innerhalb derselben Art den grössten Schwankungen unterworfen sind.

Substanzielle Verschiedenheiten im Holze beider Eichenarten waren ebenfalls nicht nachweisbar, da auch in dieser Beziehung innerhalb derselben Species grosse Schwankungen vorkommen. Beim Uebergange aus dem Splintzustande in den des Kernes wird die Reservestärke der innersten Splintringe zur Entwicklung von Thyllen in den Gefässen grossentheils verbraucht. Durch Zufuhr von Gerbstoff, durch Ablagerung desselben und seiner Spaltungsproducte vermehrt sich die Substanzmenge im Durchschnitt um etwa 6 Gewichtsprocente. Zugleich vermehrt sich das specifische Gewicht der Wandungssubstanz erheblich. Bei der Traubeneiche des Spessartes und bei der

Stieleiche in Oberbayern schwankt das Gewicht der Wandungssubstanz im Splinte zwischen 1.55 und 1.565. Dasselbe steigert sich in Folge der Verkernung auf 1.59 bis 1.60. Der Umstand, dass bei der Kernbildung die Substanzmenge und zugleich das specifische Gewicht der Substanz sich vermehrt, berechtigt zu dem Schlusse, dass die Zunahme des specifischen Substanzgewichtes der Zufuhr einer Substanz von sehr hohem specifischen Gewichte zuzuschreiben sei, womit aber die Möglichkeit nicht ausgeschlossen sein soll, dass auch die Holzwandungssubstanz selbst bei der Verkernung Veränderungen unterworfen sei.

In den bei Würzburg gefällten Eichen ergab die Untersuchung sehr verschiedene specifische Gewichte der Substanz, nämlich 1.55 bis 1.66 für den Splint und 1.56 bis 1.71 für den Kern. Die Untersuchung, welchen Umständen diese grossen substanziellen Verschiedenheiten zuzuschreiben sind, hat noch nicht zu befriedigenden Resultaten geführt.

Ueber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen.

Von Max Planck.

(Eingelaufen 8. November.)

Unter obigem Titel hat Herr L. Boltzmann in den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften vom 5. Mai 1894 gegen den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes, wie er sich in den von mir herausgegebenen Kirchhoff'schen Vorlesungen über die Theorie der Wärme, S. 142 ff., findet, einen Einwand geltend gemacht. Da sich die Spitze des Angriffs zum grossen Theil gegen den Herausgeber jener Vorlesungen richtet, indem von Ungenauigkeiten der Darstellung gesprochen und sogar die Stellung des Herausgebers zur kinetischen Gastheorie damit in Verbindung gebracht wird, so liegt mir daran, mich gegen diesen Vorwurf zu vertheidigen. Es könnte nämlich durch ihn leicht die Meinung erweckt werden, als ob in die Darstellung des genannten Beweises sich irgend ein Mangel in der Form eingeschlichen habe, der durch Anwendung grösserer Sorgfalt und Genauigkeit von Seiten des Herausgebers hätte vermieden werden können.

Eine solche Meinung wäre aber durchaus irrig. Bei keiner anderen Stelle des Kirchhoff'schen Buches bietet das

vom Verfasser hinterlassene Manuscript mehr Garantieen dafür, dass die Vorlesung thatsächlich genau so gehalten wurde, wie sie gedruckt vorliegt, und in der That handelt es sich bei dem Boltzmann'schen Einwand keineswegs um ein mögliches Missverständniss oder um eine Unklarheit in der Ausdrucksweise, sondern der Einwand trifft gerade den Kern des ganzen Beweises; es ist nicht denkbar, demselben Rechnung zu tragen, ohne dass der Ideengang vollständig abgeschnitten wird. Von einem Mangel in der Darstellung kann also gar nicht die Rede sein, und damit halte ich die Aufgabe des Herausgebers für erledigt, wie das auch in meinem Vorwort ausdrücklich hervorgehoben ist. Eine Kritik des vorgetragenen Gedankenganges und an Stelle eines unvollkommenen Beweises womöglich einen besseren verlangen heisst doch nicht weniger, als vom Herausgeber ein neues Buch fordern. Wer würde dann wohl die Verantwortung übernehmen können, ein nachgelassenes Werk herauszugeben?

Nach der formellen Rechtfertigung sei mir auch noch ein Wort zum Inhalt verstattet. Den Boltzmann'schen Einwand habe ich mir seinerzeit ebenfalls gemacht, wenn auch in etwas anderer, doch in so wenig abweichender Form, dass ich hier nicht mehr darauf zurückkomme und mich einfach auf die Anerkennung seiner sachlichen Berechtigung beschränke. Ich habe aber daran noch eine weitere Ueberlegung geknüpft, die ich bei dieser Gelegenheit hier anfügen möchte, obwohl ich nicht sicher weiss, ob sie nicht schon einmal angestellt worden ist. In dem Maxwell-Kirchhoff'schen Beweis wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Moleküle nach Beendigung eines Zusammenstosses in bestimmter Weise auseinanderfliegen, aus dem Satze von der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer unabhängiger Ereignisse auf zwei verschiedene Weisen berechnet: einmal direct durch Betrachtung des Zustandes nach dem Stoss, das andere Mal durch Betrachtung des Zustandes vor

dem Stoss. Aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke resultirt dann das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz. Die erste Berechnungsart ist aber im Allgemeinen nicht zulässig, da die Zustände der Moleküle nach dem Stoss nicht mehr unabhängige Ereignisse sind im Sinne jenes benutzten Satzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nur bei Gültigkeit des Maxwell'schen Gesetzes wird also jene Berechnung richtig, oder mit anderen Worten: wenn das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz gilt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Moleküle mit bestimmten Geschwindigkeiten auseinanderfliegen, ebenso gross als die, dass zwei Moleküle mit denselben Geschwindigkeiten zusammentreffen. Bei allen anderen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzen gilt dieser Satz nicht.

Wenn man nun in einem in vollständigem Gleichgewicht befindlichen Gas die Geschwindigkeiten sämmtlicher Moleküle plötzlich gerade umgekehrt denkt, so verwandelt sich je ein Paar gerade vor einem Zusammenstoss befindlicher Moleküle in ein Paar gerade auseinanderfliegender Moleküle und umgekehrt; dann vertauschen sich also auch die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Gilt nun das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz, bei welchem diese Wahrscheinlichkeiten einander gleich sind, so befindet sich auch nach dem Verwandlungsakt das Gas in einem Zustand dynamischen Gleichgewichts; gilt aber ein anderes Vertheilungsgesetz, so kann dies offenbar nicht mehr zutreffen.

Nun besagt aber ein allgemeiner, aus dem Hamilton'schen Princip abzuleitender Satz der Mechanik, dass in einem Punktsystem mit conservativen Kräften, welches sich im dynamischen Gleichgewicht befindet, eine plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten abermals einen dynamischen Gleichgewichtszustand bedingt. Demzufolge muss man schliessen: „Das Maxwell'sche Gesetz ist das einzige Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz, welches im Einklang steht

mit dem Satze der Mechanik, dass der dynamische Gleichgewichtszustand eines Punktsystems durch ein plötzliches Umkehren aller Geschwindigkeiten nicht gestört wird.“ Durch diese Ueberlegung wird, so viel ich sehe, der Boltzmann'sche Einwand ganz vermieden und das Maxwell'sche Gesetz auf einen festeren Boden gestellt. Hervorheben möchte ich noch besonders, dass die Frage, ob eine solche plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten physikalisch ausführbar ist, hiebei ganz ausser Betracht bleibt.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1894.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Entsprechend der Geschäftsordnung der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften finden jährlich zwei öffentliche Sitzungen statt, zu welchen nicht nur Eingeladene, sondern Jedermann Zutritt hat; die eine an einem sogenannten Königstage, zu Ehren ihres Protectors, die andere an ihrem Stiftungstage. Die heutige Festsitzung gilt unserm durchlauchtigsten derzeitigen Protector, Seiner königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten Luitpold von Bayern, der in diesem Saale ebenso wohlwollend zu uns niederschaut, wie wir alle ehrfurchtsvoll und dankbar zu ihm aufschauen.

Zunächst sei mir gestattet, einige Thatsachen mitzutheilen, aus welchen hervorgeht, wie unablässig unser Protector und seine Staatsregierung für die Akademie und für die wissenschaftlichen Sammlungen, welche mit der Akademie verbunden sind, Sorge tragen, und nebstdem auch zu erwähnen, was von anderen Seiten geschehen ist, die Zwecke der Akademie und des Generalconservatoriums zu fördern.

Dann wird durch die HH. Classensecretäre die Verkündigung der von Seiner königlichen Hoheit bestätigten Wahlen neuer Mitglieder folgen und schliesslich Hr. College Professor Dr. Sohncke die Festrede über einen allgemein interessirenden Gegenstand, über die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten, halten.

Als ich im vorigen Jahre an dieser Stelle über akademische Ereignisse der vorangegangenen Zeit berichtete, gedachte ich auch unseres an den damals versammelten Landtag gerichteten Antrages, der Akademie ein Capital von etwa 500 000 ℳ oder einen jährlichen Zuschuss von 20 000 ℳ zu bewilligen, um damit wissenschaftliche Unternehmungen der drei Classen unserer Akademie zu ermöglichen. Regierung und Landtag haben in dankenswerther Weise wenigstens einen Theil dieses Antrages sich angeeignet und einen auf 20 Jahre berechneten jährlichen Zuschuss von 5000 ℳ bewilligt, um damit die Kosten der von unserer Akademie im Bunde mit den anderen grossen wissenschaftlichen Körperschaften Deutschlands und Oesterreichs geplanten und bereits begonnenen Bearbeitung eines neuen grossen lateinischen Wörterbuches (Thesaurus linguae latinae) zu bestreiten. Seither haben die hiefür verbundenen fünf Körperschaften eine eigene Commission für dieses Unternehmen gebildet, zu deren thätigsten Mitgliedern eines der Mitglieder unserer philosophisch-philologischen Classe, Prof. Dr. v. Wölfflin, gehört.

Wir erneuern den Ausdruck unseres lebhaften Wunsches, dass insbesondere den naturwissenschaftlichen Disciplinen weitere hochherzige Spenden des künftigen Budgetlandtages zu Hülfe kommen möchten.

Der neu begründete Verband wissenschaftlicher Körperschaften hat seither zwei weitere Delegirten-Versammlungen gehalten, die erste im Mai dieses Jahres in Göttingen, die andere im September in Innsbruck. Auf beiden wurde

namentlich der Plan eines weiteren gemeinsamen wissenschaftlichen Unternehmens, gleichartig organisirte Untersuchungen über den Zusammenhang der Erdschwere mit den tektonischen Verhältnissen der Erdrinde, berathen. In Göttingen wurde beschlossen, zu diesem Zwecke mit der seit Jahren bestehenden internationalen Commission für Erdmessung, an der auch unsere Akademie durch eine eigene ständige Commission betheiligt ist, in Verbindung zu treten. Das ist nun auch in Innsbruck geschehen und hat dahin geführt, dass die vom 5. bis 12. September dort tagende permanente Commission der internationalen Erdmessung sich bereit erklärte, dahin zu wirken, dass aus ihrem Schoosse eine eigene Section für das Studium der Schwere sowohl nach ihrer Intensität, wie auch nach ihrer Richtung gebildet werde, von welcher Section durch Beiziehung von Geologen auch die einschlägigen geologischen und geophysischen Probleme bearbeitet werden könnten.

Von den vom bayerischen Landtag für die Zwecke der Akademie und der mit ihr verbundenen wissenschaftlichen Sammlungen des Staates weiterhin neubewilligten Summen sind besonders hervorzuheben: der Betrag von 168000 ℳ für den vollständigen Umbau der Gewächshäuser im Botanischen Garten und für die neue Einrichtung des Botanischen Instituts, weiter die für den Neubau des Physiologischen Hörsaales und den Umbau des Physiologischen Instituts bewilligte Summe von 162000 ℳ.

Kleinere Beträge, zusammen etwa 9400 ℳ, wurden für Einrichtung oder Ausstattung des Botanischen Instituts, dann der mathematisch-physikalischen, der geologischen und der mineralogischen Sammlung im ausserordentlichen Etat bewilligt. Der ordentliche Etat der zoologischen Sammlung wurde um jährlich 1714 ℳ erhöht.

Mit Bedauern muss ich erwähnen, dass der Conservator der mathematisch-physikalischen Sammlung, Geheimrath

Professor Dr. v. Boltzmann, schon nach einer Wirksamkeit von drei Jahren uns wieder verlassen hat, um einem höchst ehrenvollen Ruf in seine Heimath, nach Wien, zu folgen. Die Akademie kann, gleich der mit ihr zu einträchtigem Wirken verbundenen Ludwigs-Maximilians-Universität, nur den Wunsch und die Hoffnung aussprechen, dass recht bald ein dieses Vorgängers würdiger Nachfolger sich finden möge.

Eine wesentliche Aenderung ist auch bei dem bis in die jüngste Zeit mit dem k. Münzcabinet durch eine Art von Personalunion verbundenen Museum von Abgüssen classischer Bildwerke erfolgt, indem nach dem Rücktritt des inzwischen verstorbenen Conservators der beiden Sammlungen, des Geheimen Raths Professor Dr. v. Brunn, das von ihm begründete Museum von Gypsabgüssen unter dem neuen Professor der Archäologie an der Universität München, Professor Dr. Furtwängler, zum Range eines selbständigen Conservatoriums erhoben und damit einem von seinem Gründer seit langen Jahren gehegten Wunsch entsprochen wurde.

Aus dem der Akademie gehörenden, hauptsächlich der Vermehrung unserer wissenschaftlichen Sammlungen dienenden, leider nur allzu kleinen sogen. Mannheimer Reservefonds haben seit meinem letzten Bericht die paläontologische Sammlung, das Botanische Institut, das Antiquarium und die mathematisch-physikalische Sammlung bescheidene Zuschüsse erhalten, theils zur Vermehrung der Sammlungen, theils zur Anschaffung von Instrumenten. Sollte der nächste Landtag unserer Bitte um Gründung eines neuen akademischen Fonds Gehör schenken, so würde uns damit die Möglichkeit geboten, diese und andere ebensosehr der allgemeinen Volksbildung wie dem strengen wissenschaftlichen Studium dienende Sammlungen auf eine Stufe zu heben, welche den verwandten Instituten anderer Staaten entspricht.

Inzwischen freuen wir uns, wenn hin und wieder — und geschähe es nur in zehnfach höherem Maassstab! — der patriotische und wissenschaftliche Eifer von einzelnen Privaten unsere Staatssammlungen bedenkt. Von dem, was im letzten Jahre auf diese Weise denselben zugekommen ist, gedenke ich dankbar der Geschenke, welche unsere Landsleute, der kaiserliche Gouverneur von Kamerun, Eugen v. Zimmerer, dann Herr Hofrath Dr. Martin in Sumatra, weiter der Afrikareisende Dr. Holub in Wien dem ethnographischen Museum und der zoologischen Sammlung gemacht haben. — Hochwillkommen waren auch schöne Geschenke, mit welchen die HH. Apotheker Burger und Zeichnungslehrer Heinrich Morin dahier, sodann Professor Selenka in Erlangen und Apotheker Wispauer in Singapore die zoologische Sammlung bedacht haben.

Die zoologische Sammlung hat ihrerseits gern zur weiteren Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse im Lande beigetragen dadurch, dass sie entbehrliche Doubletten verschiedenen Gymnasien und anderen Mittelschulen zutheilte.

Auf ihrem engeren Arbeitsgebiet hat die Akademie auch im vergangenen Jahre besonders nach zwei Richtungen hin sich thätig erwiesen: einerseits durch eigene wissenschaftliche Publicationen philosophisch-philologischer, mathematisch-physikalischer und historischer Art, andererseits durch Pflege eines sehr ausgedehnten Schriftentausches mit zahlreichen anderen wissenschaftlichen Instituten und Körperschaften — ein Tausch, welcher insbesondere der kgl. Hof- und Staatsbibliothek zu gute kommt, der wir nach altem Herkommen alle uns nicht doppelt zugehenden Publicationen überreichen.

Von den speciellen Unternehmungen unserer Akademie gedenke ich heute auch noch des seit einer Reihe von Jahren theils durch Geldmittel, theils durch Arbeitskräfte der Aka-

[illegible] geförderten Werke, der Herstellung einer hydro-
graphischen Karte des Bodensees, eines Unternehmens, an
dem sich die fünf Uferstaaten vereinigt haben und welches
[illegible] [illegible] dieses Jahres zu einem gewissen Abschluss
gelangt ist. Die gemeinsamen Kosten beliefen sich bis
dahin auf etwa [illegible] Francs; auf Bayern, d. h. auf unsere
Akademie, [illegible] [illegible] etwa [illegible] Francs oder [illegible] M.
[illegible] die [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] Münchener [illegible] an den [illegible] Unternehmen. Wenn
wir [illegible] dabei [illegible]. Wir [illegible] es [illegible] manchmal
gewesen ist, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Beitrag [illegible] unseren
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. So
müssen wir immer wieder mit einem gewissen Neid unserer
[illegible] in Berlin und Wien [illegible], welche für sich
allein [illegible] grössere wissenschaftliche Unternehmungen in
die Hand nehmen und zu Ende führen können.

Ich möchte [illegible] schliessen, ohne noch beizufügen,
dass die reichen Mittel, welche unseren [illegible] zu [illegible]
stehen, nicht allein vom Staate kommen, sondern dass ein
erheblicher Theil auch aus Zuwendungen von Personen stam-
men, welche [illegible] wissenschaftliche Forschungen
und Werke [illegible] zu unterstützen streben. So besitzt
z. B. die Wiener Akademie durch mehrere testamentarische
Verfügungen ein Kapital von mehr als [illegible] Gulden öster-
reichischer Währung, d. h. gegen [illegible] M., dessen Zinsen
sie im Sinne der Stifter für verschiedene wissenschaftliche
Zwecke verwenden kann. Unsere Akademie hat nur ein
einziges Mal einen solchen Stifter gefunden, der aber kein
Münchener, auch kein Bayer, sondern aus einem anderen Theile
von [illegible] ist. Im Jahre [illegible] schenkte uns ein
[illegible], der [illegible] [illegible] [illegible], zur Förde-
rung des Studiums der griechischen Sprache und Literatur
ein Kapital im Betrage von [illegible] Francs oder [illegible] M.
Aus den Zinsen von diesem Kapitale konnten Preisaufgaben

gestellt und die rühmlichst gelösten honorirt werden. Zwei der Preisträger, die HH. Oberhummer und Krumbacher, wurden dadurch veranlasst, Reisen nach Griechenland und in den Orient zu unternehmen und seltene Handschriften in auswärtigen Bibliotheken zu untersuchen. Der Zographos-Fonds gehört ausschliesslich unserer philosophisch-philologischen Classe zur Verwendung; aber auch die historische Classe und namentlich die mathematisch-physikalische hätte viele Wünsche und Aufgaben, die weder durch den Zographos-Fonds, noch durch den Thesaurus linguae latinae gefördert werden können.

Wahlen.

Der Classensekretär, Herr C. v. Voit, giebt sodann die von der Akademie vorgenommenen und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigten Wahlen bekannt. Es wurden in der mathematisch-physikalischen Classe gewählt:

zum ordentlichen Mitgliede:

Herr Generalmajor a. D. Dr. Carl v. Orff, bisher ausserordentliches Mitglied;

zu ausserordentlichen Mitgliedern:

Herr Dr. Ferdinand Lindemann, o. Professor der Mathematik an der Universität München;

Herr Dr. Alfred Pringsheim, a. o. Professor der Mathematik an der Universität München.

Sitzung vom 1. Dezember 1894.

1. Herr H. SEELIGER legt eine Abhandlung: „über den Schatten eines Planeten“ vor.

2. Herr FERD. LINDEMANN spricht: „über die conforme Abbildung der Halbebene auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das von einer algebraischen Curve begrenzt wird.“

3. Herr A. v. BAEYER hält einen Vortrag: „über die Natur der Terpentinöle und verwandter Substanzen.“

Die Resultate dieser Untersuchungen werden an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

Ueber die conforme Abbildung der Halbebene auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das von einer algebraischen Curve begrenzt wird.

Von F. Lindemann.

(*Eingelaufen 1. Dezember.*)

Schon 1869 hatte Schwarz gelehrt, wie man das Innere einer Parabel und das Innere einer Ellipse auf das Innere eines Kreises (oder auf die Halbebene) conform abbilden kann; bald darauf fügte er die Abbildung des Aeusseren einer Parabel oder Ellipse hinzu.[2]) Auch für ein Flächenstück, das durch eine endliche Anzahl von geradlinigen Strecken oder Kreisbögen begrenzt wird, kann man die Abbildung nach Schwarz leisten,[3]) d. h. auf die Lösung einer gewissen Differentialgleichung (dritter Ordnung) zurückführen. Sanio hat dann in seiner Dissertation[4]) einen Ansatz zur Lösung für den Fall gegeben, dass es sich um ein Polygon

1) Borchardt's Journal Bd. 70 und Annali di matematica II. Serie t. 3. Vgl. Gesammelte Abhandlungen Bd. II, p. 77 und 102.

2) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 15. Jahrg. 1870. Gesammelte Abhandlungen Bd. II, p. 141.

3) Borchardt's Journal Bd. 70 und 75; vgl. für geradlinig begrenzte Flächen Christoffel, Annali di matematica, II. Serie Bd. 1, 1867, und Bd. 4.

4) Die Abbildung des Aeusseren eines Kreisbogenpolygons auf eine Kreisfläche. Königsberg, 1885.

handelt. das von gleichseitigen Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkte begrenzt wird: doch lässt dieser Ansatz nicht die Richtung erkennen, in welcher eine Verallgemeinerung zu erwarten sei.

Andere Beispiele, in denen die Fläche durch einen stetig gekrümmten Curvenzug begrenzt wird, waren nicht bekannt. Kürzlich habe ich nun eine Methode angegeben.[1]) nach der das fragliche Problem gelöst werden kann, wenn sich eine rationale Function von x und y mit reellen Coëfficienten derartig bestimmen lässt, dass eine passende Potenz des Quotienten (wo Φ eine rationale Function bezeichnet)

$$\frac{\Phi(z, z_1)}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}$$

eine rationale Function von z wird, vorausgesetzt, dass die Gleichung der begrenzenden Curve in der Form

$$f(z, z_1) = 0 \tag{1}$$

gegeben ward, und dass $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ gesetzt wird, wobei x und y rechtwinklige Coordinaten bedeuten. Dieser Fall liegt in den von Schwarz behandelten Beispielen (Ellipse und Parabel) vor, ferner bei der Hyperbel, bei jeder Curve dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgeht, bei jeder Curve vierter Ordnung, welche in jedem der imaginären Kreispunkte einen Doppelpunkt hat, und bei vielen Curven $n$ter Ordnung, z. B. allen, deren Gleichung in der Form

$$a z^n z_1^n + b z^n + b_1 z_1^n + c = 0$$ [2])

---

1) Sitzungsberichte der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., 7. Juni 1894.

2) Früher hatte ich nur den Fall $a = 0$ erwähnt; Herr A. Löwy machte mich darauf aufmerksam, dass man das Beispiel in der jetzt gegebenen Weise verallgemeinern kann.

geschrieben werden kann, wo a und c reell, b und b_1 zu einander conjugirt sind.

Wird dagegen der Rand des abzubildenden Flächenstückes durch eine beliebige algebraische Curve gebildet, so soll durch die folgenden Ueberlegungen ein Ansatz für das betreffende Problem gegeben werden.

1. Wir setzen $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$, wo x und y die orthogonalen Coordinaten eines Punktes des Randes seien, und schreiben die Gleichung der begrenzenden Curve $n$ter Ordnung wieder in der Form (1); dieselbe möge keine singulären Punkte besitzen.

Wir benutzen im Folgenden vielfach diejenige Function η, durch welche sich die Coordinaten eines Punktes der Curve nach Schottky, Poincaré und Klein als eindeutige Functionen darstellen lassen. Es werde allgemein

$$\{\varphi, z\} = \frac{d^2 \log \varphi'}{d z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \varphi'}{d z}\right)^2 \tag{2}$$

gesetzt, wo $\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$; dann ist bekanntlich nach Schottky und Cayley[1]), wenn z als Function von Z gedacht wird:

$$\{\varphi, Z\} = \{z, Z\} + \{\varphi, z\}\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2. \tag{3}$$

Ersetzt man hierin φ und z durch z_1, so wird

$$\{z, z_1\}\left(\frac{dz_1}{dX}\right)^2 = -\{z_1, z\}\left(\frac{dz}{dX}\right)^2. \tag{4}$$

Durch die complexe Variable $Z = X + iY$ werde ein Punkt der Halbebene $Y > 0$ dargestellt, auf welche das von der Curve (1) umschlossene Oval abgebildet werden soll. Auf dem Rande ist dann $Z = X$ reell, während $z = x + iy$

1) Vgl. z. B. Schwarz, Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. II, p. 362.

und $z_1 = x - iy$ einander conjugirt sind. Man erkennt demnach aus (4), dass die linke Seite nur ihr Zeichen wechselt, wenn man i mit $-i$ vertauscht; diese linke Seite ist also auf dem Rande rein imaginär.[1])

2. Vermöge der Gleichung (1) fassen wir z_1 als Function von z auf. Ueber der z-Ebene haben wir dann eine Riemann'sche Fläche, deren Verzweigungspunkte mit den Brennpunkten der Curve $f = 0$ zusammenfallen.[2]) Die Ausdehnung der Abbildungs-Aufgabe auf diese ganze Fläche führte mich in den eben bezeichneten einfachen Fällen zur Lösung und wird uns auch jetzt zum Ziele führen.

Das auf die Halbebene abzubildende Flächenstück wird durch ein Oval der Curve $f = 0$ begrenzt. Das Blatt der Fläche, in welchem das Oval liegt, bezeichnen wir als erstes Blatt. Dasselbe ist in der Regel durch mindestens zwei Brennpunkte, die im Innern des Ovals liegen, mit einem zweiten Blatte verbunden (wie man durch Grenzübergang erkennt, wenn man einen Doppelpunkt auflöst). Ausserdem hängt das erste oder zweite Blatt vielleicht durch andere Brennpunkte mit noch weiteren Blättern der Fläche zusammen. Alle Brennpunkte, zu denen man von einem im

---

1) Man zeigt leicht, dass sie gleich $4i\frac{dk}{dX}\cdot\frac{ds}{dX}$ ist, wenn k das Krümmungsmaass, und ds das Bogenelement der Curve bezeichnen.

2) Bei Construction dieser Fläche ist es nützlich, sich derjenigen Vorstellungen zu bedienen, welche ich in den „Vorlesungen über Geometrie" (Bd. II, Theil 1, p. 621 ff., 1891) über die Interpretation der complexen Zahl z entwickelt habe, und welche den Zusammenhang mit den imaginären Kreispunkten und sonach mit den Brennpunkten sofort erkennen lassen. Klein erwähnt neuerdings in einem Berichte über seine Vorlesungen (1891—92), dass er sich derselben Art Riemann'scher Flächen bedient habe (Math. Annalen Bd. 45, p. 143); es sei bemerkt, dass ich die oben erwähnten Beispiele der Abbildungsaufgabe schon 1892 vorgetragen habe, vgl. auch Sitzungsbericht der phys.-ökon. Ges. zu Königsberg i. Pr. vom 6. Oktober 1892.

ersten Blatte und innerhalb des Ovals gewählten Punkte gelangen kann, ohne das Oval oder eine in anderen Blättern über dem Oval liegende Curve zu überschreiten, bezeichnen wir als innere Brennpunkte, alle anderen als äussere Brennpunkte. Ein Verzweigungspunkt, der zwar im Innern des Ovals liegt, aber nicht in einem Blatte, in das man ohne das Oval zu überschreiten aus dem Innern des Ovals (im ersten Blatte genommen) gelangen könnte, ist also auch ein äusserer Brennpunkt.

Betrachten wir eine Function, welche von dem Punkte z, z_1 innerhalb dieser untereinander verzweigten Blätter eindeutig abhängt (wobei z, z_1 weder den Rand des Ovals noch eine darüber liegende Curve überschreitet), als Function von $Z = X + iY$ (wo $Y > 0$ die als Bild dienende Halbebene definirt), so erhalten wir über der Z-Ebene eine Riemann'sche Fläche, in welcher jedem „inneren" Brennpunkte der Curve $f = 0$ ein Verzweigungspunkt der oberen Halbebene entspricht, und bei der vermöge dieser Verzweigungspunkte ebenso viele Blätter zusammenhängen als bei der gegebenen Fläche im Innern des Ovals. Es fragt sich nun, wie ist diese Riemann'sche Fläche über die reelle X-Axe hinaus in jedem der fraglichen Blätter fortzusetzen, wenn der Punkt z, z_1 den Rand des Ovals in einem der über der z-Ebene liegenden Blätter überschreitet?

Geschieht dies im ersten Blatte, so ist klar (da die betrachtete Function für reelle Werthe von X im ersten Blatte reell sein muss, um für das Abbildungsproblem verwandt werden zu können), dass sich über die untere Halbebene eine symmetrische Riemann'sche Fläche als Fortsetzung des zuerst betrachteten Theiles ausbreiten wird; dieselbe besteht aus einer gleichen Anzahl von Blättern, und in ihnen nimmt die betrachtete Function Werthe an, welche denjenigen conjugirt sind, die ihr in den entsprechenden Punkten der

Blätter über der oberen Halbebene zukommen. Wie sich aber die so über der unteren Halbebene ausgebreiteten Blätter nun wieder in die obere Halbebene fortsetzen, bleibt zu erörtern.[1])

3. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Curve $f = 0$ aus $p + 1$ reellen Zügen besteht, wenn p das Geschlecht der Curve bezeichnet. Nach Schottky[2]) kann man die vom Punkte z, z_1 gebildete Riemann'sche Fläche auf einen durch $2p$ Kreise (von denen etwa einer die übrigen umschliesst) begrenzten Theil der Ebene conform und eindeutig abbilden. Ist ein Punkt der letzteren durch die complexe Zahl η bestimmt, so geschieht die Abbildung durch Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$\{\eta . z\} = \varphi(z, z_1), \tag{5}$$

wo φ eine gewisse rationale Function von z und z_1 bezeichnet; es wird η als Quotient der beiden particulären Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coëfficienten gefunden.

Die $2p$ Kreise sind einander paarweise zugeordnet, so dass der Punkt η von dem einen Kreise eines Paares zu dem zugeordneten springt, wenn der Punkt z, z_1 einen bestimmten von den $p + 1$ reellen Zügen der Curve überschreitet. Jedem reellen Zuge (einen zunächst ausgenommen) entspricht so ein Paar von Kreisen; jedes Paar besteht aus

---

1) Bei den früher von mir behandelten Beispielen geschah dies einfach, indem die über $Y > 0$ liegenden Halbblätter sich sämmtlich direct in die über $Y < 0$ liegenden Halbblätter fortsetzten. Im Allgemeinen geschieht dies indessen nur im ersten Blatte.

2) Vgl. Borchardt's Journal Bd. 83, 1877 (und die 1875 erschienene Dissertation). Schottky und Klein machen darauf aufmerksam (Math. Annalen Bd. 20, p. 300 und Bd. 21, p. 143), dass sich in dem 1876 veröffentlichten Riemann'schen Nachlasse (Ges. Werke, p. 413) bereits ähnliche Untersuchungen finden.

zwei Kreisen, die einander in Bezug auf einen und denselben $(2p+1)$ten Kreis zugeordnet sind und durch eine solche lineare Transformation von η (eigentlich durch eine „Spiegelung") aus einander entstehen, welche diesen $(2p+1)$ten Kreis ungeändert lässt. Der letztere geht aus dem $(p+1)$ten reellen Zuge der Curve bei der Abbildung hervor. Die Function η kann über jeden Kreis hinaus durch den bekannten Process der „Spiegelung" fortgesetzt werden; dadurch wird die Unsymmetrie beseitigt, welche in Bezug auf den $(p+1)$ten reellen Zug nach der soeben gegebenen Darlegung zu bestehen scheinen würde. Auf jedem Kreise, also auch auf jedem reellen Zuge der Curve $f=0$, nimmt eine gewisse lineare Function von η reelle Werthe an.

4. Denjenigen Kreis, welcher dem Rande des gegebenen Ovals entspricht, denken wir uns als reelle Axe einer H-Ebene, auf welche wir die η-Ebene mittelst einer linearen Transformation abbilden. Die anderen $2p$ Kreise liegen dann paarweise symmetrisch zu dieser Axe.

Die Function $\{H.\ Z\}$ ist hiernach reell auf dem Rande des Ovals; für sie denken wir uns über der Z-Ebene die in Nr. 2 erwähnte mehrblättrige Fläche construirt.

Die reellen Coordinaten x, y eines reellen Punktes der Curve lassen sich nach Schottky als eindeutige automorphe Functionen von H darstellen:

$$x = \varphi(H), \quad y = \psi(H),$$

welche für reelle Werthe von H reell sind, also für conjugirte Werthe von H auch einander conjugirte Werthe annehmen. In den Veränderlichen z und z_1 haben wir die Parameter-Darstellung

$$(6) \qquad z = \varphi(H) + i\,\psi(H), \quad z_1 = \varphi(H) - i\,\psi(H).$$

Es sei nun $u_r + i\,v_r = \varphi(H_r)$, $w_r + i\,\omega_r = \psi(H_r)$; und es

mögen H_1, H_2, ... H_μ (wo $\mu \leqq n$ bei einer n-blättrigen Fläche) einen und denselben Werth von z (also über einander liegende Punkte der Fläche) ergeben, so dass:

$$u_1 - \omega_1 = u_2 - \omega_2 = \ldots . = u_\mu - \omega_\mu,$$
$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2 = \ldots . = v_\mu + w_\mu.$$

Wir behaupten, dass dann die den conjugirten Werthen von H_1, ... H_μ zugeordneten Punkte der Fläche nicht ebenfalls über einander liegen können, falls $\mu > 2$ ist. In der That, sollte dieses der Fall sein, so hätten wir für zwei verschiedene Werthe der Indices r und s

$$u_r - i\, v_r + i\,(w_r - i\,\omega_r) = u_s - i\, v_s + i\,(w_s - i\,\omega_s),$$

also:

$$u_1 + \omega_1 = u_2 + \omega_2 = \ldots . = u_n + \omega_\mu,$$
$$v_1 - w_1 = v_2 - w_2 = \ldots . = v_n - w_\mu;$$

und es würde sich ergeben

$$u_1 = u_2 = \ldots . = u_\mu, \quad v_1 = v_2 = \ldots . = v_\mu,$$
$$w_1 = w_2 = \ldots . = w_\mu, \quad \omega_1 = \omega_2 = \ldots . = \omega_\mu.$$

Es würden also auch die zugehörigen Werthe von z_1 (nemlich $u_r - \omega_r + i\,(v_r + w_r)$) sämmtlich einander gleich, und der fragliche Punkt wäre ein $(\mu - 1)$-facher Verzweigungspunkt der Curve $f = 0$; das Auftreten eines solchen aber können wir, falls $\mu > 2$, vorläufig ausschliessen. Der Fall $\mu = n = 2$ ist durch die früher von mir behandelten Beispiele schon vollständig erledigt.

5. Kehren wir jetzt zu dem Probleme der Fortsetzung unserer über der Z-Ebene ausgebreiteten Fläche zurück. Mit dem ersten Blatte der ursprünglichen Fläche (in dem das gegebene Oval liegt) mögen μ Blätter in der geschilderten Weise zusammenhängen; wir denken sie uns durch Ränder r_1, r_2, ... r_μ begrenzt, die über dem Ovale liegen, während

r_1 mit dem Ovale zusammenfällt. Letzteren entsprechen μ geradlinige Ränder über der reellen X-Axe: R_1, R_2, ... R_μ, welche ebenso viele Halbebenen ($Y > 0$) begrenzen. Die conjugirten Halbebenen ($Y < 0$) werden durch die Ränder R_1', R_2', ... R_μ' begrenzt, die ebenfalls über der X-Axe liegen, und von denen R_1 mit R_1' identisch ist. Diesen neuen Randcurven entsprechen wieder in der ursprünglichen Fläche geschlossene Curven r_2', r_3', ... r_μ', die zu den Curven r_2, r_3, ... r_μ conjugirt sind, deren Bilder in der H-Ebene daher leicht zu bestimmen sind; sie können, wie soeben in Nr. 4 gezeigt wurde, nicht übereinander liegen. Wir wählen diejenige Curve r' aus, welche am weitesten über die anderen Curven r' hinübergreift;[1]) in dem ganzen durch sie begrenzten Gebiete ist dann z als Function von Z definirt, also auch jede algebraische Function von z, und zwar letztere zugleich in allen darüber oder darunter liegenden Theilen von Blättern der ursprünglichen Riemann'schen Fläche. Diese Curve r' und die $\mu - 1$ über oder unter ihr in den anderen Blättern der Fläche liegenden Curven geben neue Ränder, welche das ursprünglich für die Variable z gegebene Gebiet wesentlich erweitern. In entsprechender Weise ist damit auch über der Z-Ebene das Gebiet der Variabeln Z und der zur Darstellung von $\{H, Z\}$ dienenden Fläche bis an neue Ränder R_2'', R_3'', ... R_μ'' über die Ränder R_2', R_3', ... R_μ' hinaus fortgesetzt. Dasselbe gilt von den conjugirt imaginären Gebieten der Fläche; sie sind über die Ränder R_2, R_3, ... R_μ hinaus in die untere Halbebene bis an neue Ränder P_2, P_3, ... P_μ fortgesetzt; vielleicht haben einige dieser Ränder dabei bereits die ganze untere Halbebene überstrichen und befinden sich in neuen Blättern über der oberen Halbebene, in welchem Falle die entsprechenden (conjugirten) Ränder R'' in

1) Statt dessen könnte man eine neue Curve construiren, welche sich aus möglichst günstig gewählten Theilen der verschiedenen Curven r_2', r_3', ... zusammensetzt.

der unteren Halbebene verlaufen. Den Rändern P_2, P_3, ... P_μ entsprechen über der z-Ebene in der ursprünglichen Fläche Curven ϱ_2, ϱ_3, ... ϱ_μ, welche der Curve r' und den direct über oder unter ihr liegenden Curven conjugirt sind (immer in dem Sinne, dass einander entsprechende Punkte durch conjugirte Werthe von H gemäss (6) dargestellt werden), und welche daher selbst nach Nr. 4 nicht übereinander liegen können. Mit ihnen kann man in gleicher Weise die gemachten Schlüsse fortsetzen. Jedem von z beschriebenen Wege entspricht gemäss diesen Ueberlegungen ein angebbarer Weg der Variabeln Z und umgekehrt.

6. Es fragt sich zunächst, ob die Variable z sich vielleicht einer Grenzcurve nähern kann, über die hinaus eine Fortsetzung nicht mehr möglich ist. Sollte dies geschehen, so müsste der zum conjugirten Werthe von H gehörige Punkt z' sich ebenfalls einer natürlichen Grenze nähern; und dasselbe müsste für alle zugehörigen $\mu - 1$ Punkte in der zur Darstellung von $\{\eta, z\}$ dienenden Fläche der Fall sein. In jedem Blatte hätte man eine solche Grenzcurve über derjenigen, welche in einem Blatte als natürliche Grenze von z auftritt; die conjugirten Punkte müssten dann in den verschiedenen Blättern die conjugirten Grenzcurven bilden, also alle übereinander liegen, was nach Nr. 4 nicht möglich ist.

Das Gebiet der Variabeln z ist also, wenn z als Function von Z betrachtet wird, in keiner Weise durch eine natürliche Grenze beschränkt.

7. In analoger Weise zeigt man, dass z als Function von Z keinen wesentlich singulären Punkt haben kann, wenn die Variable η auf das in Nr. 3 geschilderte, von $2p$ Kreisen begrenzte Gebiet beschränkt bleibt.

Sollte nemlich an irgend einer Stelle z die Function Z

wesentlich singulär sein, so müsste auch $\{\eta, Z\}$ dort eine wesentliche Singularität haben, und es müsste dasselbe für alle über z gelegenen Stellen der zur Darstellung von $\{\eta, z\}$ dienenden Fläche gelten, ebenso für alle conjugirten Stellen. Die letzteren aber liegen nicht übereinander, jede von ihnen gibt also zu weiteren Punkten der zuletzt erwähnten Riemann'schen Fläche Veranlassung, die ebenfalls wesentlich singulär sind, u. s. f. Einer der so erhaltenen singulären Punkte müsste dann in das Innere des ursprünglichen Ovals fallen, wie folgende Schlussweise lehrt.

Nehmen wir z. B. an, ein solcher Punkt Z_0 läge im Innern eines durch die in Nr. 5 benutzten Ränder P_1, P_2, $\ldots P_\mu$ und R_1, R_2, $\ldots R_\mu$ begrenzten Gebietes; der entsprechende Punkt z_0 liegt dann innerhalb des durch die Curve r' begrenzten Gebietes, und zwar als wesentlich singulär in allen übereinanderliegenden Blättern; die gleiche Singularität muss dann in den conjugirten Gebieten, d. h. auch innerhalb des ursprünglichen Ovals vorkommen, was nicht möglich ist. Liegt der Punkt Z_0 ausserhalb der Ränder P, so hat man die frühere Schlussweise in gleicher Weise rückwärts fortzusetzen. Wesentliche Singularitäten sind also bei der Abhängigkeit der Grössen Z und z von einander ausgeschlossen, soweit solche nicht schon bei der Abhängigkeit der Function η von z vorkommen, d. h. so lange η (oder H) keinen der früher besprochenen $2p$ Kreise überschreitet.

8. Wir untersuchen noch, wie sich die reellen Züge der gegebenen Curve über der Z-Ebene abbilden, d. h. wie sich Z ändert, wenn H einen der $2p$ Kreise überschreitet.

Geht H von einem Punkte der reellen Axe aus in der oberen Halbebene zu einem Punkte des Kreises K, so läuft gleichzeitig der conjugirte Punkt H_1 in der unteren Halb-

ebene dem entsprechenden Punkte des conjugirten Kreises K_1 zu. Diesen beiden Wegen entsprechen zwei Wege in der ursprünglichen (über der z-Ebene ausgebreiteten) Riemann'schen Fläche, welche vom Punkte z, z_1 der Randcurve des ersten Ovals zum Punkte z', z_1' eines zweiten reellen Zuges hinführen, und ebenso zwei Wege in der über der Z-Ebene ausgebreiteten Fläche, welche vom ursprünglichen Punkte der reellen X-Axe aus zu einem (in einem anderen Blatte gelegenen) Punkte Z' bezw. zu dem Punkte Z_1' im conjugirten Blatte führen. Dabei ist Z' eine Function von z', und umgekehrt; ebenso ist z_1' eine Function von Z_1', also auch (da z_1' eine Function von z' ist) von Z', und nach Gleichung (3) haben wir identisch:

$$[\{z', Z'\} - \{z_1', Z'\}]\left(\frac{d\,Z'}{d\,t}\right)^2 = \{z', z_1'\}\left(\frac{d\,z_1'}{d\,t}\right)^2.$$

Bedeutet t einen reellen Parameter, so ist die rechte Seite rein imaginär (vgl. oben Nr. 1); es ist folglich $\{z', Z'\}(d\,Z')^2$ conjugirt zu $\{z_1', Z'\}(d\,Z')^2$; andererseits ist derselbe Ausdruck conjugirt zu $\{z_1', Z_1'\}(d\,Z_1')^2$; es folgt also

$$\{z_1', Z'\}(d\,Z')^2 - \{z_1', Z_1'\}(d\,Z_1')^2 = 0.$$

Ferner ist nach (3) die linke Seite der letzten Gleichung identisch gleich $-\{Z', Z_1'\}(d\,Z_1')^2$; es ist somit $\{Z', Z_1'\} = 0$, d. h. es besteht eine Relation der Form

$$\alpha\,Z'\,Z_1' + \beta\,Z' + \gamma\,Z_1' + \delta = 0. \tag{7}$$

Dieses aber ist die Gleichung eines Kreises. Auf der über der Z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche entspricht daher jedem reellen Zuge der Curve $f = 0$ ein Paar von einander zugeordneten Kreisen. Entweder muss das Innere oder das Aeussere eines solchen Kreises als durch ihn begrenzt betrachtet werden.

Ueber diese Kreise hinaus kann man den Verlauf der

Function Z durch den Process der „Spiegelung" verfolgen, genau wie es mit der Function H durch Spiegelung an den $2p$ Kreisen der H-Ebene geschieht. Bei wiederholter Anwendung des Processes wird man schliesslich eine Fläche mit unendlich vielen Blättern und unendlich vielen Verzweigungen construiren. Nähert sich der Punkt Z einer Stelle, wo sich diese Verzweigungen unendlich häufen, so wird der Punkt z unendlich oft die reellen Züge der Curve $f = 0$ überschreiten, also einen unendlich langen Weg beschreiben. Durch dieses Verhalten ist die Abhängigkeit der Grössen z und Z von einander als eine im Allgemeinen transscendente charakterisirt.

9. Es erübrigt noch, die Verzweigungspunkte der für $\{H, Z\}$ construirten Fläche näher zu untersuchen. Als solche treten, wie wir bereits wissen (Nr. 2), die den inneren Brennpunkten von $f = 0$ entsprechenden Punkte und die ihnen conjugirten Punkte auf. Um die Frage allgemein in Angriff zu nehmen, setzen wir wie in Nr. 4

$$z = u + iv + i(w + i\omega) = u - \omega + i(v + w),$$
$$z_1 = u + iv - i(w + i\omega) = u + \omega + i(v - w).$$

Der conjugirte Punkt hat dann die Coordinaten

$$z' = u - iv + i(w - i\omega) = u + \omega - i(v - w),$$
$$z_1' = u - iv - i(w - i\omega) = u - \omega - i(v + w).$$

Seien nun $z = a$, $z_1 = a_1$ die Coordinaten eines Punktes der ursprünglichen Fläche und

$$(8) \qquad z = a + (Z - A)^{\lambda}\,\mathfrak{P}, \quad z_1 = a_1 + (Z - A)^{\mu}\,\mathfrak{P}^0,$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^0$ Potenzreihen bedeuten. Dann wird, da z_1' zu z, z' zu z_1 conjugirt imaginär ist

$$(9) \quad z' = a_1' + (Z_1 - A_1)^{\mu}\,\mathfrak{P}_1^0, \; z_1' = a' + (Z_1 - A_1)^{\lambda}\,\mathfrak{P}_1,$$

wenn a', a_1', $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1^0$ bezw. zu a, a_1, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^0$ conjugirt imaginär sind.

Für einen Punkt, dem derselbe Werth von z, aber ein anderer von z_1 zukommt, sei

$$\zeta = u' - \omega' + i(v' + w') = z = u - \omega + i(v + w)$$
$$\zeta_1 = u' + \omega' + i(v' + w').$$

Ihm ist dann der Punkt

$$\zeta' = u' + \omega' - i(v' - w'), \quad \zeta_1' = u' - \omega' - i(v' + w')$$

conjugirt; es ist also, da $u' - \omega' = u - \omega$ und $v' + w' = v + w$ war, ζ_1' identisch mit z_1'. Werde $\zeta = a$ für $Z_1 = A_1$, so haben wir

$$(10)\quad \zeta' = a + (Z_1 - A_1)^{\nu}\, \mathfrak{P}_2, \quad \zeta_1' = a' + (Z_1 - A_1)^{\lambda}\, \mathfrak{P}_1.$$

Sei nun erstens der Punkt a, a_1 kein ausgezeichneter Punkt der Fläche $f = 0$, so ist $\lambda = \mu$. Ist der Punkt ζ', ζ_1' ebenfalls nicht ausgezeichnet, so ist auch $\nu = \lambda = \mu$. Sei λ von 1 verschieden, so haben wir nach (8) und (9) sowohl in A als in A_1 einen Verzweigungspunkt, nach (10) aber auch in jedem Punkte, welcher in der ursprünglichen Fläche über einem zu a, a_1 conjugirten Punkte liegt: das aber ist unmöglich, wie die in Nr. 7 angewandte Schlussweise sofort erkennen lässt. Wäre der Punkt a, a' zufällig ein Brennpunkt, so ist in der folgenden Betrachtung nur ζ, ζ_1 durch a, a_1 zu ersetzen.

Sei zweitens a, a_1 ein Brennpunkt von $f = 0$. Dann haben wir $\lambda = 2\mu$. Ist auch $\nu = \lambda = 2\mu$, so ergibt sich für $\lambda \gtrless 1$ dieselbe Unmöglichkeit, wie vorhin. Für $\lambda = 1$ folgt aus (9)

$$z_1' - a' = (z - a_1)^2\, \mathfrak{P}_3;$$

diese Gleichung sagt aus, dass der zum Brennpunkte conjugirte Punkt der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ genügt, wie es auch direct einleuchtet. Aus (10) ergibt sich kein Widerspruch;

$\lambda = 1$ ist also die einzig mögliche Annahme. Wäre ν von λ verschieden, so wäre der Punkt α, α' zufällig selbst auch ein Brennpunkt oder ein Nullpunkt der Function $\frac{\partial f}{\partial z}$; dann wird man einen anderen über z, z_1 liegenden Punkt benutzen können, dessen conjugirter kein Brennpunkt ist, und analoge Schlüsse wiederholen.

Nicht nur die „inneren", sondern auch die „äusseren" Brennpunkte der Curve $f = 0$ gehen also bei unserer Abbildung in Verzweigungspunkte der für $\{H, Z\}$ construirten Fläche über. Letztere hat ausserdem nur in den conjugirten Punkten Verzweigungspunkte.

10. Wir haben jetzt alle Mittel bereit, um die Lösung unseres Abbildungsproblems auszuführen. Die Function $\{H, Z\}$ ist in der ursprünglichen Riemann'schen Fläche überall holomorph, so lange der Punkt z, z_1 keinen der $p + 1$ reellen Curvenzüge überschreitet.

Beim Uebergange über einen solchen Zug aber springt H auf den conjugirten Werth H_1, gleichzeitig Z auf den conjugirten Werth Z_1 über; dabei ist nach (7)

$$Z_1 = \frac{a\,Z + b}{c\,Z + d} \text{ und ebenso } H_1 = \frac{a'\,Z + b'}{c'\,Z + d'}$$

also nach (3) in bekannter Weise

$$\{H_1, Z_1\} = \{H, Z_1\} = \{H, Z\} \left(\frac{d\,Z}{d\,Z_1}\right)^2.$$

Die Function $\{H, Z\}$ ist ferner reell auf dem Rande des abzubildenden Ovals. Auf demselben Rande ist die Function

$$i\,\frac{d\,z}{d\,Z}\,\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = -\,i\,\frac{d\,z_1}{d\,Z}\cdot\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

reell. Das Quadrat der letzteren Function, dividirt durch

$\{H, Z\}$, gibt daher einen Quotienten, der ungeändert bleibt, wenn der Punkt z, z_1 einen reellen Zug von $f = 0$ auf der Riemann'schen Fläche überschreitet, und welcher auf dem Rande des abzubildenden Ovals reell ist. Auch $\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$ ist überall holomorph, so lange die reellen Züge nicht überschritten werden. Es besteht daher eine Gleichung der Form

$$\{H, Z\} = \Phi(z, z_1) \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2} \left(\frac{dz}{dZ}\right)^2 \tag{11}$$

wo Φ eine rationale Function von z und z_1 bedeutet, die auf dem Rande des abzubildenden Ovals reelle Werthe annimmt, sich also als rationale Function von x und y mit reellen Coëfficenten darstellt.

Die nähere Bestimmung der Function Φ wird von transscendenten Bedingungen abhängen, deren Aufstellung in explicirter Form grosse Schwierigkeiten bereitet, wie dies ja auch für die entsprechende Function φ in der Differentialgleichung (5) eintritt[1]). Wir können aber das Verhalten der Function Φ an den singulären Stellen angeben.

Für einen Brennpunkt a, a_1 ist nach Nr. 9

$$z_1 - a_1 = \sqrt{z - a}\,\mathfrak{P}, \qquad z - a = (Z - A)\,\mathfrak{P}_1,$$
$$H - H_0 = \sqrt{z - a}\,\mathfrak{P}_2,$$

also

$$\{H, Z\} = \frac{3}{8} \frac{1}{(Z - A)^2} + \cdots = \frac{C}{(z - a)^2} + \cdots,$$

wenn C eine Constante bedeutet. Ferner ist

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = C'(z_1 - a_1) + \cdots;$$

1) Vgl. Poincaré, Acta matematica Bd. 4, p. 292 ff. und (für das Verhalten von φ an den singulären Stellen) Bd. 1, p. 278.

die Function Φ muss daher der Bedingung genügen:

$$\lim_{z=a} \Phi \cdot (z - a) = \text{Const.} \tag{12}$$

Handelt es sich um einen Punkt α, α_1, welcher zu einem Brennpunkte conjugirt ist (d. h. einen Nullpunkt der Function $\frac{\partial f}{\partial z}$), so haben wir nach Nr. 9:

$$z_1 - \alpha_1 = (z - \alpha)^2 \mathfrak{P}_3, \qquad z - \alpha = \sqrt{Z - A_1}\, \mathfrak{P}_4,$$
$$H - H_0' = (z - \alpha)\, \mathfrak{P}_5,$$

also

$$\{H, Z\} = \frac{3}{8} \frac{1}{(Z - A_1)^2} + \cdots = \frac{\text{Const.}}{(z - \alpha)^4} + \cdots;$$

ferner $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \text{Const.}$; für Φ ergibt sich also die Bedingung:

$$\lim_{z=a} \Phi \cdot (z_1 - \alpha_1) = \text{Const.}$$

Dieselbe entspricht genau der Bedingung (12); in der That hätte sie auch aus der Realität der Function Φ direct geschlossen werden können.

Die Gleichung (11) können wir noch in bemerkenswerther Weise umformen. Ersetzen wir nemlich in (3) φ durch H, so ergibt sich mit Hülfe von (11) unter Benutzung von (4):

$$\{Z, z\} = \varphi(z, z_1) - \frac{\Phi(z, z_1)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}. \tag{13}$$

Auf diese Differentialgleichung dritter Ordnung, in der φ und Φ die in (5) und (11) vorkommenden rationalen Functionen von z und z_1 bedeuten, ist hiernach das Problem zurückgeführt, ein durch ein Oval einer algebraischen Curve $f = 0$ (die keine Doppelpunkte hat) begrenztes einfach zusammen-

hängendes Flächenstück auf die Halbebene abzubilden.

11. Insbesondere kann es vorkommen, dass die Kreise, welche nach Nr. 8 in der Z-Ebene den reellen Zügen der Curve $f=0$ entsprechen, paarweise mit einander und mit der reellen Axe zusammenfallen. Dann schliesst sich die für $\{H, Z\}$ construirte mehrblättrige Fläche, und $\{H, Z\}$ wird eine algebraische Function von Z. Die Gleichung (13) wird dann von der Form

$$w\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2 = \Psi,$$

wo w eine algebraische Function von z, Ψ eine algebraische Function von Z bedeutet.

Von dieser Form war die Lösung in den früher von mir behandelten Fällen. Bei denselben tritt noch die weitere Besonderheit ein, dass die Riemann'sche Fläche über der z-Ebene mehrfach von dem Bilde der über der Z-Ebene construirten Fläche überdeckt wird. Es liegt dies daran, dass die ursprüngliche Riemann'sche Fläche in jenen Beispielen nicht nur in Bezug auf den reellen, gegebenen Curvenzug, sondern auch in Bezug auf die über demselben in den anderen Blättern gelegenen Curvenzüge, gewisse Symmetrie-Verhältnisse zeigt. Aehnliche Besonderheiten werden immer auftreten, wenn die zu der Curve $f=0$ gehörige Fläche solche besondere Symmetrieverhältnisse aufweist.

In dem einfachsten Falle, der Abbildung des Innern einer Ellipse auf die Halbebene, gestalten sich die Verhältnisse z. B. folgendermassen: Ueber der z-Ebene haben wir eine zweiblättrige Fläche vom Geschlechte Null, deren beide Verzweigungspunkte mit den Brennpunkten der Ellipse zusammenfallen, über der Z-Ebene eine ebenfalls zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungen (also vom Geschlechte Eins).

Zwei von diesen liegen in der Halbebene $Y > 0$, die beiden anderen sind die conjugirten Punkte der Halbebene $Y < 0$. Den beiden Blättern der oberen Halbebene entsprechen die beiden Blätter des Innern der Ellipse, begrenzt durch die Ellipse selbst und durch die darüber liegende Curve. Den conjugirten Blättern der unteren Halbebene ($Y < 0$) entspricht über der z-Ebene ein Streifen, der von der gegebenen Ellipse und einer zu ihr confocalen Ellipse E_1 begrenzt wird; überschreitet man die letztere, so kommt man wieder in die beiden über der Halbebene $Y > 0$ gelegenen Blätter, denen nun in der z-Ebene ein weiterer, von der Ellipse E_1 und einer zu ihr confocalen Ellipse E_2 begrenzter Streifen entspricht; u. s. f. Sowohl im oberen, als im unteren Blatte erhält man so unendlich viele, von confocalen Ellipsen begrenzte, ringförmige Streifen, deren jeder auf zwei über einander liegende Halbblätter derjenigen Fläche abgebildet wird, welche über der Z-Ebene construirt wurde.

Auf diese und andere Einzelheiten werde ich bei anderer Gelegenheit näher eingehen. Es mögen hier nur noch folgende Bemerkungen Platz finden.

12. Wir setzten bei unserer Ableitung voraus, dass die Curve $f = 0$ das Maximum von reellen Zügen besitze. Hat sie weniger als $p + 1$ reelle Züge, so hat man statt der Schottky'schen Untersuchungen diejenigen allgemeineren Hülfsmittel anzuwenden, die wir Poincaré verdanken;[1]) man wird dann ganz analoge Schlüsse durchführen können.

Ist das Geschlecht $p = 1$, so hat man statt $\{\eta, Z\}$ die Function $\frac{d \log \eta'}{d Z}$ zu untersuchen, wo η das zugehörige elliptische Integral erster Gattung bezeichnet. Die in Nr. 8 auftretenden Kreise sind dann durch gerade Linien zu ersetzen.

1) Vgl. Acta Matematica, a. a. O.

Das Auftreten von Doppelpunkten muss vorläufig ausgeschlossen bleiben; es scheint, dass man es nicht einfach durch Grenzübergang (d. h. durch Zusammenfallen von Brennpunkten) erledigen kann. Man würde dann weiter zum Zerfallen der Curve $f = 0$ fortschreiten können und dadurch zu Abbildungsfunctionen mit sehr bemerkenswerthen Eigenschaften geführt werden. Ich hoffe, hierauf bald zurückkommen zu können. Erledigt habe ich zunächst nur den Fall, wo der Rand des abzubildenden Flächenstückes durch eine endliche Anzahl von Kegelschnitten gebildet wird, denen die Brennpunkte gemeinsam sind. Auf diese Aufgaben soll hier nicht mehr eingegangen werden.

Ueber den Schatten eines Planeten.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 1. December.)

Für einen leuchtenden Punkt ist die Schattenfläche eines Planeten, der als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid angesehen werden darf, ein Kegel zweiter Ordnung. Infolge der Ausdehnung der kugelförmigen Sonne entsteht das Phänomen des Halbschattens. Die Schattenfläche giebt in diesem Falle die Grenze des Kern- bezw. des Halbschattens an und ist die Einhüllende aller gemeinschaftlichen Tangentialebenen an die Kugel und das Ellipsoid. Die Gleichung dieser Fläche, welche vom 8. Grade ist, ist bekannt und u. A. in dem verbreiteten Lehrbuche der analytischen Geometrie von Salmon gegeben, auch besitzt man Modelle, welche ihre wesentlichen Gestaltungsverhältnisse zur Anschauung bringen. Zu Verwendungen auf astronomische Aufgaben, bei denen es sich um wirkliche numerische Ausrechnungen handelt, wird indessen diese Gleichung nicht sehr geeignet sein. Laplace hat in der Méc. cél.[1]) angegeben, wie man die Gleichung der Schattenfläche als das Resultat der Elimination eines Parameters aus 2 Gleichungen erhält und es ist bei vielen Anwendungen bequemer an diesen Gleichungen die erlaubten

1) Livre VIII, Chap. VIII.

und erwünschten Vereinfachungen auszuführen. Laplace hat nur einen verhältnissmässig einfachen Fall, der sich bei den Verfinsterungen der Jupitertrabanten darbietet, wirklich im Einzelnen verfolgt. Es blieb hier demnach noch manche Lücke auszufüllen und dies ist zum Theil durch die Arbeiten von Hall[1]), Souillart[2]), Bruns[3]) geschehen. Die folgenden Zeilen verfolgen auf anderer Grundlage dasselbe Ziel, nämlich die Vorschriften für die Berechnung von einigen Phänomenen, die mit der Schattenfläche zusammenhängen, möglichst einfach zu gestalten und die bereits bekannten auf einfachem Wege zu begründen. —

Es werde in den Mittelpunkt der Sonne der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystemes gelegt. Seine xy-Ebene sei parallel zum Aequator des Planeten, dessen Mittelpunkt in der xz Ebene liegen und die Coordinaten A und C haben möge. Es sei ferner R der Radius der Sonne, R' der äquatoreale und R'_1 der polare Radius des Planeten. Nennt man noch e die Ellipticität $e = \frac{R' - R'_1}{R'_1}$, so wird die Gleichung der Sonnen- bezw. der Planetenoberfläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$
$$(x - A)^2 + y^2 + (1 + e)^2 [(z - C)^2 - R_1'^2] = 0 \qquad (1)$$

Eine gemeinsame Tangentialebene an Sonne und Planet wird offenbar ausgedrückt durch

$$x\gamma - y\alpha - z\beta - R = 0$$

wo $\gamma, -\alpha, -\beta$ die Richtungscosinus der Normale der Tangentenebene sind, welche parallel sein muss zur Normalen des Ellipsoides.

1) Astron. Nachr. Band 90 S. 305 ff.

2) Astron. Nachr. Band 91 S. 129.

3) Vergl. J. Hartmann, die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Abhandlungen der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Leipzig 1891 S. 18. (375).

Man hat also

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= N(x-A); \quad \alpha = -N \cdot y; \\ \beta &= -N(1+e)^2(z-C) \\ \frac{1}{N^2} &= (x-A)^2 + y^2 + (1+e)^4(z-C)^2 \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Schreibt man die Ebenengleichung so:

$$\gamma(x-A) - \alpha y - \beta(z-C) = R - \gamma A + \beta C,$$

so ergiebt sich mit Hülfe von (2):

$$\frac{1}{N}\left\{\gamma^2 + \alpha^2 + \frac{\beta^2}{(1+e)^2}\right\} = R - \gamma A + \beta C$$

Setzt man andererseits (2) in die Ellipsoidgleichung (1) ein, so wird:

$$\frac{1}{N^2}\left\{\gamma^2 + \alpha^2 + \frac{\beta^2}{(1+e)^2}\right\} = R'^2$$

Man kommt also zu den zwei Gleichungen

$$\gamma^2 + \alpha^2 + \frac{\beta^2}{(1+e)^2} = \frac{(R - \gamma A + \beta C)^2}{R'^2}$$

$$\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

und man kann demnach α und γ durch β ausdrücken.

Behält man β als einen Parameter bei, so wird die Schattenfläche, d. i. die Einhüllende aller Tangentenebenen, sich ergeben durch Elimination von β aus den Gleichungen:

$$\gamma x - \alpha y - \beta z - R = 0$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} x - \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} y - z = 0$$

oder, was dasselbe ist, durch Elimination von β aus:

$$F = (\gamma x - \beta z - R)^2 - \alpha^2 y^2 = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0 \qquad (3)$$

Indem man nun γ und α durch β ausgedrückt in (3) einsetzt, ist es vortheilhaft die Grösse

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{(1+e)^2}$$

einzuführen. Es ist auch ε oder das Quadrat der Excentricität $= 2\alpha_1 - \alpha_1^2$, wo α_1 die Abplattung im gewöhnlichen Sinne bedeutet. Die obigen Gleichungen geben nun:

$$R - A\gamma + \beta C = R' \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon}$$

$$\alpha^2 = \left[1 - \frac{R^2}{A^2} - \frac{R'^2}{A^2}\right] - 2\beta \frac{RC}{A^2} - \beta^2 \left[1 + \frac{C^2}{A^2} - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon\right]$$
$$+ 2\frac{RR'}{A^2}\sqrt{1-\beta^2\varepsilon} + 2\frac{CR'}{A^2}\beta\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}$$

Führt man nun die Hülfsgrössen ein:

$$\left.\begin{aligned}
m &= \frac{R^2}{A^2}(x-A)^2 + \frac{R'^2 x^2}{A^2} - y^2\left[1 - \frac{R^2 + R'^2}{A^2}\right] \\
n &= 2\frac{R}{A}\left\{(x-A)\left(\frac{C}{A}x - z\right) + \frac{C}{A}y^2\right\} \\
p &= \left(\frac{C}{A}x - z\right)^2 + y^2\left(1 + \frac{C^2}{A^2}\right) - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2+y^2) \\
\mu &= \frac{2RR'}{A^2}[x(x-A) + y^2] \\
\nu &= 2\frac{R'}{A}\left\{x\left(\frac{C}{A}x - z\right) + \frac{C}{A}y^2\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

so werden die Gleichungen (3) sich so darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
m + n\beta + p\beta^2 &= (\mu + \beta\nu)\sqrt{1-\beta^2\varepsilon} \\
n + 2p\beta &= \frac{d}{d\beta}\left\{(\mu + \beta\nu)\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Elimination von β macht nun keine Schwierigkeit und man könnte das Resultat in Form einer Determinante, welche die Gleichung der gesuchten Schattenfläche darstellt, sofort hinschreiben. Diese Gleichung hat aber einen viel zu hohen Grad und die Absonderung der unnöthigen Factoren ist verwickelt. In mathematischer Beziehung ist demnach die Form (5) nicht befriedigend. Für die zur Anwendung kommenden Fälle aber ist sie, wie aus dem Folgenden hervorgehen dürfte, recht geeignet. Wenigstens gelangt man durch verhältnissmässig nicht sehr complicirte Rechnungen zu den Resultaten, welche abgeleitet werden sollen.

Die Schattenfläche wird gebraucht, wenn man die Verfinsterungen der Trabanten in unserem Sonnensystem genauer zu verfolgen hat. Suchen wir die speciellen Erfordernisse auf, welche hier auftreten. Bei der Verfinsterung des Erdmondes ist eine ziemlich weit gehende Genauigkeit in den Angaben über den Verlauf der Schattenfläche erwünscht. Hier ist aber ε rund $\frac{1}{150}$, also eine sehr kleine Grösse und man wird demzufolge mit Vortheil nach Potenzen von ε entwickeln und wie sich leicht ergiebt mit der Mitnahme nur der ersten Potenz ausreichen. Unter diesen Voraussetzungen ist die Aufgabe von den Herren Hall, Souillart und besonders im Anschluss an Herrn Bruns von Herrn Hartmann vollständig gelöst worden. Im Folgenden wird das Resultat des Herrn Hartmann ebenfalls auftreten.

Bei den Jupitertrabanten ist ε nicht so klein, dass man hier ohne Weiteres ε^2 vernachlässigen kann. Hier tritt aber der Fall ein, dass die Trabanten sich sehr nahe in der Aequatorebene bewegen und demzufolge der Verlauf der Schattenfläche nur in der Nähe dieser Ebene gebraucht wird. Die Aufgabe ist von Laplace a. a. O. behandelt worden und die dort gegebene Lösung wird wohl den Anforderungen der Praxis genügen.

Es bleibt noch die Schattenfläche des Saturn zu be-

trachten übrig. ε ist hier (rund $\frac{1}{6}$) durchaus nicht klein; eine Entwicklung nach Potenzen von ε ist jedenfalls nicht einwurfsfrei, wenn man schon die zweiten Potenzen fortlassen will. Thut man Letzteres aber nicht, so werden die Entwicklungen äusserst complicirt, wenn sie auch durchführbar sind. Es finden bei den Saturntrabanten aber andere Umstände statt, die sehr weitgehende Vernachlässigungen gestatten, besonders da hier eine grosse Genauigkeit der Formeln für die Praxis ziemlich bedeutungslos sein dürfte.

Nach dem Gesagten werden also die Verfinsterungen des Erdmondes und der Saturntrabanten zu behandeln sein.

Zuerst soll die Entwicklung von (5) nach Potenzen von ε vorgenommen werden.

Setzt man

$$\Phi(\beta) = -(\mu + \nu\beta)\left(\tfrac{1}{2}\beta^2\varepsilon + \tfrac{1}{8}\beta^4\varepsilon^2 + \ldots\right)$$

so wird (5):

$$(m-\mu) + (n-\nu)\beta + p\beta^2 = \Phi(\beta)$$

$$(n-\nu) + 2p\beta = \frac{d\Phi}{d\beta}$$

Wird nun noch gesetzt:

$$\beta_0 = -\frac{n-\nu}{2p}; \quad \beta = \beta_0 + \varDelta\beta$$

so ist $\varDelta\beta$ eine Grösse vom Range ε. Nimmt man zunächst überall noch ε^2 mit, so erhält man

$$4p(m-\mu) - (n-\nu)^2 = 4p\{\Phi(\beta_0) + \Phi'(\beta_0)\varDelta\beta - p\varDelta\beta^2\}$$

und da bis auf Glieder vom Range ε

$$\varDelta\beta = \frac{1}{2p}\Phi'(\beta_0)$$

ist, so wird die Gleichung der Schattenfläche

$$4p(m-\mu) - (n-\nu)^2 = 4p\Phi(\beta_0) + [\Phi'(\beta_0)]^2 \qquad (6)$$

Wenn man nun die Glieder vom Range ε^2 fortlässt, so ist das zweite Glied rechts zu streichen und zu setzen

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}(\mu + \nu\beta_0)\,\beta_0^2\,\varepsilon$$

Den Grössen μ und ν kann man auch durchweg das negative Vorzeichen vorsetzen.

Dieses doppelte Vorzeichen bezieht sich, wie leicht zu sehen, auf die beiden Schalen der Schattenfläche, welche den Kern- und Halbschatten begrenzen. Man braucht nur das eine Vorzeichen zu berücksichtigen und dann im Resultat R' mit $-R'$ zu vertauschen. Für die Anwendung auf Mondfinsternisse ist es am zweckmässigsten, wenn man den Durchschnitt der Schattenfläche mit einer Ebene aufsucht, die senkrecht auf der Verbindungslinie Sonne-Erde steht und nicht weit vom Mondmittelpunkte entfernt ist. Nennt man die Entfernung Sonne-Erde D, lässt in diese Richtung die ξ-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems fallen, dessen Anfang im Erdmittelpunkte sich befindet, dessen y-Axe zu der früheren parallel läuft und dessen ζ-Axe senkrecht darauf nach Norden zeigt, so hat man:

$$x = A + \xi\frac{A}{D} - \zeta\frac{C}{D}$$

$$z = C + \xi\frac{C}{D} + \zeta\frac{A}{D}$$

Wird noch zur Abkürzung gesetzt

$$\sigma = \frac{R - R'}{A};\ \chi = x\sigma - R$$

so wird

$$m - \mu = \chi^2 - y^2(1 - \sigma^2)$$

$$n - \nu = -2\chi\zeta\frac{D}{A} + 2\frac{C}{A}y^2\sigma$$

$$\nu = 2\frac{R'}{A}\left[\frac{C}{A}y^2 - x\zeta\frac{D}{A}\right]$$

$$p = \frac{D^2}{A^2}(y^2 + \zeta^2) - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2 + y^2)$$

Die Gleichung (6) wird jetzt:

$$4p(m-\mu)-(n-\nu)^2 = -4\varepsilon\frac{R'^2}{A^2}(x^2+y^2)(m-\mu)$$
$$+4y^2\left[(\chi\frac{D}{A}+\zeta\frac{C}{A}\sigma)^2-(y^2+\zeta^2)\left(\frac{D^2}{A^2}-\sigma^2\right)\right]$$
$$=-(\mu+\nu\beta_0)\cdot 2p\beta_0^2\varepsilon$$

In den mit ε multiplicirten Gliedern darf aber angenommen werden:

$$\beta_0^2=\frac{(n-\nu)^2}{4p^2}=\frac{m-\mu}{p}$$

und es wird also, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer für den Augenblick mit I bezeichnet wird,

$$4y^2 I = \varepsilon p\beta_0^2\left\{4\frac{R'^2}{A^2}(x^2+y^2)-2(\mu+\nu\beta_0)\right\},$$

was man nach leichter Zwischenrechnung und mit Vernachlässigung von ε^2 schreiben kann:

$$I=\frac{D^2}{A^2}\cdot\frac{R'}{A}\left\{-\zeta^2\sigma-x^2\sigma+Rx-\frac{A^2}{D^2}y^2\sigma-2x\sigma\frac{C}{D}\zeta\right.$$
$$\left.+R\frac{C}{D}\zeta\right\}\cdot\beta_0^2\varepsilon \tag{7}$$

In dem Ausdrucke I ist aber weiter

$$\chi+\zeta\frac{C}{D}\sigma=\xi\frac{R-R'}{D}-R'=-\varrho_0, \tag{8}$$

wenn man mit ϱ_0 den Radius der Kugel bezeichnet, die mit dem Mittelpunkt in ξ den im Falle $\varepsilon=0$ entstehenden Schattenkegel berührt; ferner ist in (7) einzusetzen:

$$\beta_0^2=\frac{m-\mu}{p}=\frac{(\varrho_0+\zeta\frac{C}{D}\sigma)^2-y^2(1-\sigma^2)}{\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2}$$

Man kann sich nun überaus leicht davon überzeugen, dass man von der Erde gesehen die Schattenfläche in der Entfernung des Mondes nur um einige hundertstel Secunden verschieben kann, wenn man einfach setzt

$$\beta_0^2 = \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2},$$

ferner in der Klammer der Formel (7) als unmerklich fortstreicht das erste, vierte und sechste Glied, schliesslich σ^2 gegen $\frac{D^2}{A^2}$ im Ausdrucke von I vernachlässigt. Auf diese Weise wird

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \varepsilon \left\{ Rx - x^2\sigma - 2x\sigma \frac{C}{D} \zeta \right\}$$

Mit Hülfe der im Vorigen enthaltenen Gleichungen kann man dies auch schreiben

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \cdot \varepsilon x \varrho_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{\zeta}{\varrho_0} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{R - R'}{A} \right\}$$

oder auch, ohne Fehler zu begehen, die mehr als wie die Hundertstel der Secunde alteriren können.

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \varepsilon x \varrho_0 \qquad (9)$$

und für x kann man für alle Fälle genügend genau

$$x = A + \xi \frac{A}{D}$$

setzen. Die Gleichungen (8) und (9) geben nunmehr die Schattenfläche bei Mondfinsternissen in der Nähe des Mondes mit fast vollkommener Strenge.

Der Durchschnitt derselben mit der Ebene $\xi = \text{const.}$ ist, wie man sofort sieht, eine Ellipse. Die beiden Halbaxen $\mathcal{A}$ und B liegen in der Richtung der y bezw. der ζ. Und es ergiebt sich sofort

$$\left.\begin{aligned} A = \varrho_0 = R' - \xi \frac{R - R'}{D} \\ B = \varrho_0 \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{R'}{\varrho_0} \frac{A^2}{D^2} \frac{\xi + D}{D} \right\} \end{aligned}\right\} . \tag{10}$$

Diese Formeln stimmen vollständig überein mit den von Herrn Hartmann gegebenen, die in der That die denkbar grösste Einfachheit bei wirklichen Ausrechnungen darbieten.

Wenn man nun die zweite oben erwähnte Aufgabe, die Schattenfläche des Saturn, wie sie bei den Verfinsterungen seiner Trabanten gebraucht wird, zu entwickeln, dadurch in Angriff nehmen wollte, dass man in der begonnenen nach Potenzen von ε fortschreitenden Entwicklung weiter geht, so wäre dieser Weg durchaus beschreitbar, aber äusserst umständlich; auch ist nur schwer auf diese Weise zu übersehen, welche Vernachlässigungen begangen werden. Dagegen stellt sich eine einfachere Lösung der Aufgabe dar, die den praktischen Erfordernissen genügen dürfte, wenn man berücksichtigt, dass an den Stellen, an welchen die Saturntrabanten in die Schattenfläche des Planeten treten, diese sich nicht weit von dem Tangentialkegel entfernt, den man vom Sonnenmittelpunkt aus an Saturn legen kann.

Man wird demnach von diesem Kegel als erster Näherung ausgehen können und die nöthigen Correctionen aufzusuchen haben. Den genannten Tangentialkegel erhält man, wenn man in den Gleichungen (5) $R = 0$ annimmt. Setzt man:

$$m_0 = \frac{R'^2}{A^2}(x^2 + y^2) - y^2; \quad m_1 = \frac{R^2}{A^2}[(x - A)^2 + y^2]$$

$$\lambda(\beta) = \mu \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon} - m_1 - n\beta$$

so kann man (5) schreiben

$$\left.\begin{aligned} m_0 + p\beta^2 = \beta\nu\sqrt{1 - \beta^2\varepsilon} + \lambda(\beta) \\ 2p\beta = \frac{\nu(1 - 2\beta^2\varepsilon)}{\sqrt{1 - \beta^2\varepsilon}} + \lambda'(\beta) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wenn $\lambda = \lambda' = 0$ angenommen wird, so ergiebt die Elimination von β aus diesen Gleichungen den erwähnten Tangentialkegel. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\Phi = m_0 + p\beta^2 - \beta\nu\sqrt{1-\beta^2\varepsilon},$$

so wird man leicht die Correctionen bestimmen können, welche an die den Tangentialkegel bestimmenden Coordinaten angebracht werden müssen, um den Bedingungen der Schattenfläche zu genügen. Denkt man sich Polarcoordinaten in einer zur ξ-Axe des oben benutzten Coordinatensystems senkrechten Ebene eingeführt und setzt demgemäss

$$y = \varrho \cos\varphi; \quad \zeta = \varrho \sin\varphi; \quad \xi = \text{const.}$$

so kann Φ als Function von ϱ und φ angesehen werden. Einem bestimmten Werthe von φ entspricht in der Schattenfläche ein Werth $\varrho = \varrho_0 + \Delta\varrho$, wo ϱ_0 das demselben Werthe von φ entsprechende ϱ für den Tangentialkegel ist. Aber zu gleicher Zeit muss auch $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ gesetzt werden, wenn β_0 der Werth von β für $\lambda = 0$ ist. Entwickelt man nun die Gleichungen (11), welche sich so schreiben lassen

$$\Phi(\beta, \varrho) = \lambda(\beta, \varrho)$$
$$\Phi'(\beta) = \lambda'(\beta)$$

und bedenkt man, dass $\Phi(\beta_0 . \varrho_0) = 0$, $\frac{\partial \Phi(\beta_0, \varrho_0)}{\partial \beta_0} = 0$, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_0}\Delta\varrho + \ldots &= \lambda(\beta) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho_0 \partial \beta_0}\Delta\varrho + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta_0^2}\Delta\beta + \ldots &= \frac{\partial \lambda(\beta)}{\partial \beta} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

So wird man durch successive Näherungen zu den richtigen Werthen von $\Delta\varrho$ und $\Delta\beta$ gelangen können. In erster Näherung ist aber

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_0}\Delta\varrho = \lambda(\beta_0) \quad (13)$$

und da man bei den Saturntrabanten hierdurch den Verlauf der Schattenfläche (vom Saturn aus gesehen) auf einige Secunden genau erhält, so wird man, wie noch erörtert werden soll, dabei stehen bleiben können. Es soll nur diese Näherungsformel entwickelt werden.

Die ϱ_0 und β_0 werden aus den beiden Gleichungen bestimmt:

$$m_0 + p\beta_0^2 = \beta_0 \nu \sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon}$$

$$2p\beta_0 = \frac{\nu(1 - 2\beta_0^2 \varepsilon)}{\sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon}}$$

Hieraus folgt:

$$\beta_0^2 = \frac{2m_0^2}{\nu^2 - 2m_0 p} = \frac{\nu^2 - 2m_0 p}{2(\nu^2 \varepsilon + p^2)}$$

Die Gleichung des Tangentialkegels ist hiernach

$$\nu^2 = 4m_0(p + m_0 \varepsilon) \tag{14}$$

Für die weiteren Reductionen sind noch von Werth die Relationen:

$$\beta_0^2 = \frac{m_0}{p + 2m_0 \varepsilon}; \ \sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon} = \frac{\nu}{2m_0}\beta_0; \ 1 - \beta_0^2 \varepsilon = \frac{p + m_0 \varepsilon}{p + 2m_0 \varepsilon}$$

Will man (14) vollständig entwickelt hinschreiben, so muss man die Hülfsgrössen m_0, m_1, n etc. nach (4) einführen. Man kann diese aber so schreiben:

$$m_0 = \frac{R'^2}{A^2}(x^2 + y^2) - y^2; \ m_1 = \frac{R^2}{A^2}\left\{(x - A)^2 + y^2\right\}$$

$$n = \frac{2R}{A}\left(\frac{C}{A}\varrho^2 - \xi\zeta\right); \ p = \frac{D^2}{A^2}\varrho^2 - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2 + y^2)$$

$$\mu = \frac{2RR'}{A^2}\cdot\left\{y^2 + x\xi\frac{A}{D} - x\zeta\frac{C}{D}\right\};$$

$$\nu = \frac{2R'}{A}\cdot\left\{\frac{C}{A}\varrho^2 - \zeta D - \xi\zeta\right\}$$

Die Gleichung (14) gestaltet sich jetzt so:

$$\left(1-\frac{R'^2}{A^2}\right)\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2-\varepsilon y^2=$$
$$\frac{R'^2}{A^2}\left\{\left(\frac{D^2}{A^2}-\varepsilon\right)x^2-\varepsilon y^2-\frac{C^2}{A^2}y^2+2\frac{C}{A}\cdot\frac{D}{A}x\zeta\right\}$$

Wenn man aber bedenkt, dass für Saturn $\frac{R'}{A}$ sehr klein ist ($<\frac{1}{20000}$) und y sowohl als auch ζ gegen x ebenfalls, so wird man mit hinreichender Genauigkeit setzen dürfen

$$\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2-\varepsilon y^2=\frac{R'^2}{A^2}\left(\frac{D^2}{A^2}-\varepsilon\right)x^2 \tag{15}$$

Hierdurch ist nun ϱ_0 bestimmt. Um auch (13) vollständig zu entwickeln, wäre jetzt eine etwas umständlichere Rechnung auszuführen. Man vereinfacht aber die Sachlage durch weitere Vernachlässigungen, welche die Schattenfläche in dem betrachteten Falle, wo es sich um die Verfinsterung der Saturntrabanten handelt, ebenfalls höchstens um einige Bogensecunden verschieben können. Diese Vernachlässigungen und deren Berechtigung ergeben sich aus den folgenden Werthen, die man den Hülfsgrössen m_0, m_1 etc. geben kann:

$$\left.\begin{aligned}&m_0=\frac{R'^2}{A^2}x^2-y^2;\quad m_1=0;\quad n=-2\frac{R}{A}\cdot\xi\zeta\\&p=\frac{D^2}{A^2}\varrho^2-\frac{R'^2}{A^2}\varepsilon x^2;\quad \mu=\frac{2RR'}{A^2}x\xi\frac{A}{D};\\&\nu=-\frac{2R'}{A}\cdot\frac{D}{A}x\zeta\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Hierdurch wird, weil auch x in den vorstehenden Gleichungen nahezu unabhängig von ϱ_0 ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_0} = \frac{1}{\varrho_0} \cdot \left\{ -2y^2 + 2\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2\beta_0^2 - \nu\beta_0\sqrt{1-\beta_0^2\varepsilon} \right\}$$

Man kann aber die rechte Seite mit Hülfe der oben angegebenen Relationen so darstellen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_0} = -\frac{2y^2}{\varrho_0} \cdot \frac{\frac{R'^2}{A^2}\left(\frac{D^2}{A^2} - \varepsilon\right)x^2}{\frac{R'^2}{A^2} \cdot \frac{D^2}{A^2}x^2 - \varepsilon y^2}$$

Für die rechte Seite von (13) ergiebt sich zunächst:

$$\lambda(\beta_0) = \frac{\beta_0}{2m_0} \cdot (\mu\nu - 2nm_0)$$

und wenn man (16) benutzt, so wird schliesslich mit ausreichender Genauigkeit

$$\Delta\varrho = \pm\frac{R}{D}\xi\frac{\varrho_0}{R'}\sqrt{\frac{D^2R'^2 - \varepsilon A^2y^2}{R'^2(D^2 - A^2\varepsilon)}} \tag{17}$$

Diese Formel lässt an Einfachheit nichts zu wünschen übrig. Wollte man auch noch die zweiten Potenzen von ε fortlassen, so ergäbe sich einfach $\Delta\varrho = \pm\frac{R}{D}\xi$, was eigentlich auch schon der Genauigkeit, welche die hier in Frage kommenden Beobachtungen verlangen, voraussichtlich genügen dürfte.

Was den letzteren Punkt betrifft, so ist vor allem zu bemerken, dass die Grenze sowohl des Kernschattens als auch des Halbschattens eine rein mathematische Fiction ist, welche in den Beobachtungen nicht klar hervortreten kann. Wie der Halbschatten in unmerklichen Abstufungen in die volle Helligkeit übergeht, so bedeutet die Grenze des Kernschattens nichts anderes, als den Ort, wo der Halbschatten

anfängt, sich in stetiger Weise aufzuhellen. Ich habe die Verhältnisse, wie sie sich in Folge dieser Umstände bei Mondfinsternissen darstellen, an einem anderen Orte[1]) besprochen und gezeigt, dass sich die Grenze des Kernschattens in Folge physiologischer Einwirkungen für das beobachtende Auge in den Halbschatten hinaus scheinbar verschieben muss. Es entsteht so das bekannte Phänomen der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens. Ich habe dort einen Ausdruck abgeleitet für das Verhältniss der Helligkeit J, welche in der scheinbaren Entfernung x (hier gesehen von Saturn aus) von der Grenze des Kernschattens stattfindet, zu der ungeschwächten Helligkeit J_0 und den Ausdruck gefunden:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{5\lambda + 1}{\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}} \cdot \left(\frac{Dx}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}$$

worin $\lambda = \frac{R'}{R} \cdot \frac{D}{\xi}$. Nimmt man, was in runden Zahlen ungefähr den Verhältnissen entspricht, wie sie bei den Verfinsterungen des Japetus durch Saturn stattfinden, $\frac{\xi}{R'} = 60$, $\frac{R}{D} = \frac{1}{1800}$, so wird $\lambda = 30$ und wenn x'' den Werth von x in Bogensecunden bedeutet:

$$\frac{J}{J_0} = [6 \cdot 672 - 10]\,(x'')^{\frac{3}{2}}$$

Hieraus folgt für $x'' = 5$: $\frac{J}{J_0} = 0.005$ und für $x'' = 10$: $\frac{J}{J_0} = 0.015$.

Mit Hülfe dieser Zahlen wird man leicht ermessen können, dass die Beobachtung des Eintritts nicht sehr sicher sein kann — bei Japetus entspricht einer Zeitminute ein

1) Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrgang 27. S. 197 ff.

Bogen von 11″ vom Saturn aus gesehen — und dass es auf die Feststellung der Schattengrenze auf einige Bogensecunden auch dann nicht ankommen kann, wenn sehr grosse Fernrohre zur Verfügung stehen. Wesentlicher Einfluss kommt hierbei auch noch dem Umstande zu, dass die Trabanten keine Punkte, sondern ausgedehnte Massen sind. Doch ist hier nicht der Ort, auf diese Gegenstände näher einzugehen.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1894.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XVIII for 1893/94. 1894. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Letterkunde. Deel I, No. 3.
Afd. Natuurkunde. Deel II, No. 1—6. 8.
„ III, No. 1—14. 1893. 8⁰.
Zittingsverlagen. Natuurkunde. Jahrg. 1893/94. 1894. 8⁰.
Verslagen en Mededeelingen. Letterkunde. 3e Reeks. Deel 10. 1894. 8⁰.
Jaarboek 1893. 8⁰.
Prijsvers Phidyle. 1894. 8⁰.

Universität Athen:

Vorlesungsverzeichniss 1893/94 und 5 Schriften in griech. Sprache. 1885/93. 8⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

27. annual Report. June 1, 1894. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XIII, No. 113. 114. 1894. 4⁰.
American Chemical Journal. Vol. 15, No. 8. Vol. 16, No. 1—6. 1893/94. 8⁰.
The American Journal of Philology. Vol. 14, No. 4. Vol. 15, No. 1. 1893/94. 8⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XVI, No. 1—3. 1894. 4⁰.
Studies in historical and political science. XI. Series, No. 11. 12. XII. Ser., No. 1—7. 1893/94. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Verhandelingen. Deel 47, 2. Stuk. Deel 48, 1. Stuk. 1893. 4⁰.
Tijdschrift. Deel 37, afl. 1. 2. 3. 1893/94. 8⁰.
Notulen. Deel 31, afl. 3. 4. 1893/94. 8⁰.

Koninkl. natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 53. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv für Geschichte von Oberfranken. Band 19. Heft 1. 1893. 8⁰.

Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Godischnjak. V—VII. 1891—93. 1892—94. 8⁰.
Glas. No. 43. 44. 1894. 8⁰.
Spomenik. No. 23. 24. 1894. 4⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1894. No. 1—38. 1894. gr. 8⁰.
Acta Borussica. Band I der Behördenorganisation. 1894. 8⁰.
Abhandlungen aus dem Jahre 1893. 1893. 4⁰.
Politische Korrespondenz Friedrichs des Grossen. Bd. XXI. 1894. 8⁰.
Corpus inscriptionum latinarum. Tom. VIII. pars II. Suppl. 1894. fol. Tom. VI, pars 4, fasc. 1. 1894. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen zur geologischen Spezialkarte von Preussen. Band X, Heft 6 u. 7. 1894. 4⁰.

Permanente Commission der internationalen Erdmessung in Berlin:

Verhandlungen der 1893 in Genf abgehaltenen Conferenz. Berlin 1894. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 27. Jahrg., No. 12—18. 1894. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 45, Heft 4. Bd. 46, Heft 1. 2. 1893/94. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. VIII, No. 7—19. 1894. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1893/94, No. 11—18. 1894. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band IX, Heft 2. 3. 1894. 4⁰.

K. Geodätisches Institut in Berlin:

Jahresbericht 1893/94. 1894. 8⁰.
Feier des 100jährigen Geburtstages des Generallieutenants Dr. J. J. Baeyer. 1894. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung. 1894, Heft I.
Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam in den Jahren 1890 u. 1891. 1894. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXIII, Heft 3. 1894. 8⁰.

Curatorium der Savigny-Stiftung in Berlin:

Vocabularium jurisprudentiae Romanae jussu instituti Savigniani. Fasc. I. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:
Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Band VII, 2. Hälfte. Leipzig 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:
Wochenschrift. Bd. IX, Heft 7—10. Juli bis Oktober. Berlin 1894. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:
XIV. Jahrgang 1894. Heft 7—11. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:
Quellen zur Schweizer Geschichte. Band XIV. Basel 1894. 8⁰.

Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in Bern:
Verhandlungen. 76. Jahresversammlung in Lausanne 1893. Nebst französischer Uebersetzung. Lausanne 1893. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:
Mittheilungen. Jahrg. 1893. 1894. 8⁰.

Schweizerische geologische Kommission in Bern:
Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lief. VIII, Suppl. I. Lief. XXIV, Theil 3. 1893/94. 4⁰.

Historischer Verein des Cantons Bern:
Archiv. Band XIV, 2. 1894. 8⁰.

Gewerbeschule in Bistritz:
XIX. Jahresbericht für 1893/94. 1894. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:
Atti e Memorie. III. Serie. Vol. XII, fasc. 1—3. 1894. 8⁰.

Universität in Bonn:
Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande zu Bonn:
Jahrbücher. Heft 95. 1894. 4⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:
Bulletin. 1894. No. 11—22. 8⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:
71. Jahresbericht für das Jahr 1893. 1894. 8⁰.

Historisch-statistische Sektion der mährischen Ackerbau-Gesellschaft in Brünn:
Schriften. Band 28. 1894. 8⁰.
Notizenblatt 1893. No. 1—12. 4⁰.
Kunstarchäologische Aufnahmen aus Mähren von Alois Franz. 1894. 4⁰.

Académie Royale de Médecine in Brüssel:
Bulletin. IV. Série. Tome 8, No. 6—10. 1894. 8⁰.
Mémoires couronnés. Collection in 8⁰. Tome XIII. 1894. 8⁰.

Académie Royale des Sciences in Brüssel:
Bulletin. 3e Sér. Tome 27, No. 6. Tome 28, No. 7—11. 1894. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:
Analecta Bollandiana. Tom. XIII, fasc. 3, 4. 1894. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 37. 1893. 8⁰.
Mémoires II. E. Brenske, Die Melolonthiden. 1894. 8⁰.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Mathematische u. naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. XI, 2. Berlin 1894. 8⁰.
Ungarische Revue. 1894. Heft 5—8. 8⁰.

K. Ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Földtani Közlöny. Band XXIV, Heft 6—10. 1894. 8⁰.
Evkönyo. Band X, 6. XI, 1. 2. 1894. 8⁰.
Mittheilungen aus den Jahrbüchern. Band X, 6. 1894. 8⁰.

Statistisches Bureau der Hauptstadt Budapest:

Publikationen. XIX. XXV, 1. 1894. 4⁰.
Gust. Thirring, Geschichte des statistischen Bureaus von Budapest. Berlin 1894. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg:

Verslag over het jaar 1893. 1894. 4⁰.
Mededeelingen uit'slands Plantentuin. No. XI—XIII. 1894. 4⁰.

Institut Météorologique de Roumanie in Bukarest:

Analele. Tom 8, anul 1892. 1894. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Mémoires. Vol. 18, fasc. 1. 1894. 4⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. February—June. 1894. fol.
Meteorolog. Observations. February—June. 1894. fol.
Memorandum on the snowfall in the mountain districts. Simla 1894. fol.
India Weather Review. Annual Summary 1893. 1894. fol.
Report on the Administration 1893—94. 1894. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. N. Ser. No. 834—846. 1893/94. 8⁰.
Proceedings. 1894. No. II—VII. 1894. 8⁰.
Journal. New Series. No. 333—337. 1894. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 27, part 2. Vol. XXVIII, part 3. 1894. 8⁰.
Memoirs. Palaeontologia Indica. Series IX, Vol. II, part 1. 1893. fol.
Manual of the Geology by R. D. Oldham. 2. Edition. 1893. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VIII, part 3. 1894. 8⁰.

Museum of comparative zoology in Cambridge, Mass:

Bulletin. Vol. 25, No. 7—11. 1894. 8⁰.

K. Sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1893. Abtheilung I u. II. 1894. 4⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Guide. 1894. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. VIII, No. 356—363, 365—381. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. IV, No. 4. Vol. V, No. 1. 1894. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlinger for 1893. No. 1—21. 1894. 8⁰.
Oversigt i 1893. 1894. 8⁰.

Norwegische Commission der Europäischen Gradmessung in Christiania:

O. E. Schlötz, Resultate der 1893 ausgeführten Pendelbeobachtungen. 1894. 8⁰.

Universität in Christiania:

Aarsberetning 1891—92. 1892 93. 1893—94. 8⁰.
Jahrbuch des meteorolog. Instituts für 1891. 1893. 4⁰.
Archiv for Mathematik. Band XV, 4. XVI, 1—4. 1892—93. 8⁰.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Vol. 33, Heft 1—5. Vol. 34, Heft 1 u. 2. 1892—93. 8⁰.
Annaler 1892, 1893. 8⁰.
Th. Kjerulf, En Raekke norske Bergarter. 1892. 4⁰.
A. Chr. Bang, Dokumenter og Studier, den lutherske Katekismus' historie. I. 1893. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Chur:

23. Jahresbericht. 1893. 8.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. 37. Band. 1894. 8⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1894. 48. 49. 52. 58—75. 78—101. fol.

Academia nacional de ciencias in Córdoba (Rep. Argentina):

Boletin. Tom XII, 1. 3. 4. XIII, 1—4. Buenos Aires. 1890. 1892/93. 8⁰.

Oficina meteorologica Argentina in Córdoba (Rep. Argent.):

Anales. Tom IX. parte 1. 2. Buenos Aires 1893/94. 4⁰.

Universität Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. W. S. 1894/95. 1894. 8⁰.
Uebersicht der akadem. Behörden im Studienjahre 1894/95. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. VIII, Heft 3. 4. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in Darmstadt:

Archiv für Hessische Geschichte. N. F. Band I, Heft 2. 1894. 8⁰.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tome VIII, livre 1. 2. Leide 1894. 4⁰.

Colorado Scientific Society in Denver:

R. C. Hills, Ore deposits of Camp Floyd District, Tooele County, Utah 1894. 8⁰.

F. C. Knight, A suspected new mineral from Cripple Creek. 1894. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Band VII, 1. 1894. 8⁰.

Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Turjew (Dorpat):

Sitzungsberichte. Bd. X, 2. 1893. 1894. 8⁰.

Archiv für die Naturkunde Liv-, Esth- und Kurlands. Bd. X, 3. 4. 1893—94. 8⁰.

Universität Turjew (Dorpat):

Schriften aus dem Jahre 1893/94. 4⁰ u. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tome XV. trimestre 1. 2. 1894. 8⁰.

K. Sächsischer Alterthumsverein in Dresden:

Jahresbericht 1893/94. 1894. 8⁰.

Neues Archiv für sächsische Geschichte und Alterthumskunde. Bd. XV. 1894. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Dresden:

XXIV. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

K. norske Videnskabers Selskab in Drontheim:

Skrifter. 1892. 1893. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

The Transactions. Vol. 30, part 13. 14. 1894. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein Pollichia in Dürkheim:

Mittheilungen. 51. Jahrgang, No. 7. 1893. 8⁰.

Der Drachenfels bei Dürkheim a. d. H. von C. Mehlis. Neustadt 1894. 8⁰.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports. Vol. V. 1894. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 20, pag. 161—304. 1894. 8⁰.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VII, 1. 1894. 8⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1893—94. 1894. 8⁰.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1892—93 u. 1893—94. 1893/94. 8⁰.

Lehr- und Erziehungsanstalt in Maria-Einsiedeln:

Jahresbericht für das Jahr 1893/94. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthümer der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 8. Jahrg. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

78. Jahresbericht pro 1892/93. 1894. 8⁰.

Universität Erlangen:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1893—94 in 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Ser. Vol. 17, disp. 1. 2. 1894. 8⁰.

Biblioteca nazionale centrale in Florenz:

Catalogo dei manoscritti 'gianici della Biblioteca nazionale centrale di Firenze per Franc. L. Pullé. No. 1—4. 1894. 4⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Bericht. 1894. 8⁰.
Abhandlungen. Band XVIII, 3. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a/M.:

Inventare des Frankfurter Stadtarchivs. Band IV. 1894. gr. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für das Jahr 1892/93. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. 1894. No. 1—6. 8⁰.
Societatum Literae. 1894. No. 4—9. 8⁰.

Universität Freiburg i. Br.:

Schriften der Universität. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau in's Land in Freiburg:

Schau in's Land. 20. Jahrlauf, Heft 1. 2. 1894. fol.

Institut National Genèvois in Genf:

Bulletin. Tome 32. 1894. 8⁰.

Observatoire in Genf:

Résumé météorologique de l'année 1893 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. 1894. 8⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus dem Jahre 1893/94.

Botanischer Garten in Gent:

Botanisch Jaarboek. VI. Jaargang. 1894. 8⁰.

Universitäts-Bibliothek in Giessen:

Schriften der Universität Giessen aus dem Jahre 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Band 70, Heft 1. 1894. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Abhandlungen. Band 39.
  a) Historisch-philologische Classe.
  b) Mathem.-phys. Classe. 1894. 4⁰.
Gelehrte Anzeigen. 1894. No. 7—12. Juli bis Dezember. 1894. 4⁰.
Nachrichten. Mathem.-phys. Classe. 1894. No. 3. 4⁰.
  " Philol.-hist. Classe. 1894. No. 2. 3. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothenburg:

Handlingar. Heft 26—29. 1891—94. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (Ohio):

The Journal. Vol. IV, p. 73—192. 1894. 8⁰.

Steiermärkischer Landesausschuss in Graz:

82. Jahresbericht des Steiermärk. Landesmuseums Joanneum. 1894. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Heft 42. 1894. 8⁰.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 26. Jahrg. 1894. 8⁰.

Uebersicht der in den periodischen Schriften des historischen Vereins für Steiermark bis 1892 veröffentlichten Aufsätze. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrg. 1893. (Heft 30.) 1894. 8⁰.

Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Greifswald:

Pommersche Genealogien. Bd. 4. Herausg. von Th. Pyl. 1895. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:

A. Weinhold, Bemerkungen zu Platons Gorgias als Schullektüre. (Programm.) 1894. 4⁰.

K. Instituut voor de Taal, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indie im Haag:

Bijdragen. V. Reeks. Deel X, afl. 3, 4. 1894. 8⁰.

Naamlijst der leden op 1. Juni. 1894. 8⁰.

Alb. C. Kruyt, Woordenlijst van de Bareë-Taal. 1894. 8⁰.

Ministerie van Kolonien im Haag:

Pithecanthropus erectus: Eine menschenähnliche Uebergangsform aus Java. Von Eug. Dubois. Batavia 1894. 4⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. II. Series. Vol. I, part 3. 1893. 8⁰.

Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 30, No. 11—20. 1894. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 48, Heft 2. 3. Leipzig 1894. 8⁰.

Universität Halle:

Schriften der Universität a. d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Thüring.-Sächs. Verein für Erforschung des vaterländischen Alterthums in Halle:

Neue Mittheilungen. Band XVIII, der II. Hälfte Schlussheft. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 66. Heft 5. 6. Band 67, Heft 1—4. Leipzig. 1894. 8⁰.

Stadt-Bibliothek in Hamburg:

Von den Hamburger wissenschaftlichen Anstalten im J. 1893 herausgegebene Schriften in 4⁰ und 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Zeitschrift. Band IX, 3. 1894. 8⁰.

Geschichtsverein in Hanau:

Festschrift zu seiner 50 jährigen Jubelfeier. 1894. 4⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Hannover:

42. und 43. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrgang 1894. 8⁰.

Teylers tweede Genootschap in Harlem:

Verhandelingen. N. R. deel III, stuk 3 in 8⁰ und Atlas, 5e stuk in fol. 1894.

Musée Teyler in Harlem:

Archives. Ser. II. Vol. IV, Partie 2. 1894. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:

Archives Néerlandaises. Tome 28, livre 2—4. 1894. 8⁰.

Universitäts-Bibliothek in Heidelberg:

Schriften der Universität a. d. J. 1893/94 in 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. IV, Heft 2. 1894. 8⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

Carte géologique de la Finlande. Livr. 25. 26. avec 2 cartes. 1894. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Acta societatis scientiarum fennicae. Tom. XIX. 1893. 4⁰.
Oefversigt af Förhandlingar. XXXV. 1892—93. 1893. 8⁰.
Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 52. 53. 1893. 8⁰.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:

Fennia. IX. XI. 1894. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium zu Herény (Ungarn):

Meteorologische Beobachtungen im Jahr 1891. Budapest 1894. 4⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Jahresbericht für das Jahr 1893/94. 1894. 8⁰.
Archiv des Vereins. N. F. Band XXVI, 1. 2. 1894. 8⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mittheilungen. 43. Jahrgang. 1894. 8⁰.

Vogtländischer Alterthumsforschender Verein in Hohenleuben:

61.—64. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 21. Jahrgang. 1894. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge. Heft 38. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. XXI. Jahrg. 1892/93. 1894. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 28, Heft 4. Bd. 29, Heft 1. 1894. 8⁰.

Centralbureau für Meteorologie in Baden zu Karlsruhe:

Jahresbericht für das Jahr 1893. 1894. 4⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. 2ᵉ Serie. Tom. IV, No. 1. 2. 1894. 8⁰.

Kaiserliche Universität in Kasan:

Jubiläumsschrift zu der hundertjährigen Geburtstagsfeier N. Lobatschewski's. 1894. 4⁰.
Utschenia Sapiski. Tom. 61, Heft 4—6. 1894. 8⁰.
2 Dissertationen (von Troizky und Goluben) in russischer Sprache. 1894. 8⁰.

Universität in Kiel:

Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Universität in Kiew:

Iswestija. Tom. 34. No. 6—10. 1894. 8⁰.

Université Imperiale in Kharkow:

Annales. Tome 3. 1894. 8⁰.
Annales. 1894. Heft 2. Nebst 2 Abhandlungen in russ. Sprache. 1894. 8⁰.

Geschichtsverein für Kärnthen in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1893. 1894. 8⁰.
Archiv für vaterländische Geschichte. 17. Jahrg. 1894. 8⁰.
Carinthia. I. 84. Jahrg., No. 1—6. 1894. 8⁰.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg.

Ertesitö. II. Abth. Band 19, Heft 1. 2. 1894. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:

Mittheilungen. Heft 25. 1894. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 34. Jahrgang. 1893. 4⁰.

Universität Königsberg:

Schriften der Universität aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1894. No. 2. 8⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke. 9. Band, 2. Hälfte. 1894. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

L. H. F. de Fine Olivarius, Stamtavler over Slaegterne Olivarius og de Fine. 1894. 4⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Monumenta medii aevi historica. Tom. XIII. 1894. 4⁰.
Sprawozd. komisyi fizyograf. Tom. 28. 1893. 8⁰.
Rozprawy wydz. matemat. Tom. 26. 1893. 8⁰.
Zbior wiad. do Antropologii. Tom. 17. 1893. 8⁰.
Anzeiger. 1894. Juni, Juli, Oktober, November. 8⁰.
Biblioteka pisarzów polskich. Tom. 28. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. Band 30. 1894. 8⁰.

Société d'histoire de la Suisse Romande in Lausanne:

Mémoires et Documents Tome 38. 1894. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. XIII. Deel, Aflev. 3, 4. und Register zu Deel I—XII. 1894. 8⁰.

Handelingen en Mededeelingen 1893—1894. 1894. 8⁰.

Levensberichten der afgestorven medeleden. 1894. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, Theil XIII, Heft 1. 2. 1894. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrsschrift. Jahrgang 29. Heft 2. 1894. 8⁰.

Katalog der astronom. Gesellschaft. I. Abth., 6 Stück. 1894. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft zur Erforschung vaterländischer Sprache und Alterthümer in Leipzig:

Mittheilungen. Band IX, Heft 1. 1894. 8⁰.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen: a) Philol.-hist. Classe. Band XIV. 6. 7. XV. 1.
b) math.-phys. Classe. Band XXI. 2. 1894. 4⁰.

Berichte der philol.-hist. Classe. 1894. I. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. Folge. Band 49, Heft 10—12. Band 50. Heft 1—12. 1894. 8⁰.

K. K. Bergakademie in Leoben:

Programm für das Jahr 1894/95. 1894. 8⁰.

Agricultural-Experiment Station, University of Nebraska in Lincoln:

7th annual Report for 1893. 1894. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule“ in Loewen:

La Cellule. Tome X. 2. 1894. 4⁰.

The Agent-general for New South-Wales in London:

An Australian Language as spoken by the Awabakal. by L. E. Threlkeld. Sydney 1892. 8⁰.

British Association for the Advancement of Science in London:

Report on the 63th Meeting. 1894. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Histor. Review. Vol. IX. No. 35. 36. July and October 1894. 8⁰.

Royal Society in London:

Philosophical Transactions. Vol. 184. A. B. 1894. 4⁰.

List of Fellows. 30. Novbr. 1893. 4⁰.

Catalogue of Scientific Papers. Vol. X. 1894. 4⁰.

Proceedings. Vol. 55. No. 334. 335. Vol. 56. No. 336—339. 1894. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 54. No. 9. Vol. 55. No. 1. 1894. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 380—385. July—December 1894. 8⁰.
Proceedings. No. 141. 142. Session 1893—94 and 1894—95. 8⁰.

Linnean Society in London:

The Journal: a) Zoology, No. 155—157.
b) Botany, No. 177 und 205—208. 1894. 8⁰.
The Transactions: IId Serie:
a) Zoology. Vol. V, part 9—11. Vol. VI, part 1. 2.
b) Botany. Vol. III, part 9—11. Vol. IV, part 1. 1893—94. 4⁰.
Proceedings. October 1893, May 1894. 1893/94. 8⁰.
List 1893/94. 8⁰.
Catalogue of the Library. Part II. Periodicals. 1893. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-Chirurgical Transactions. Vol. 76. 77. 1893/94. 8⁰.
Catalogue of the Library. Supplement VII. 1893. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1894. part 4. 5. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1894. Part II. III. 8⁰.
Transactions. Vol. XIII, 9. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 50, No. 1285—1308. 1894. 4⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 21, livr. 1. 2. 1893/94. 8⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. 49. Band. Stans 1894. 8⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. No. 1. 2. 1894. 8⁰.

Real Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 25, cuad. 1—6. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht und Abhandlungen. 1893/94. I. Halbjahr. 1894. 8⁰.
Festschrift zur Feier des 25jähr. Stiftungstages des Vereins. 1894. 8⁰.

Fondazione scientifica Cagnola in Mailand:

Atti. Vol. XI, 1891/92. 1893. 8⁰.

Reale Istituto Lombardo di Scienze in Mailand:

Rendiconti. Ser. II. Vol. 25. 1892. 8⁰.
Memorie: a) Classe di scienze storiche. Vol. 19, fasc. 1.
b) Classe di scienze matematiche. Vol. 17, fasc. 2. 1892. 4⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio storico Lombardo. Ser. III. Anno XXI, fasc. 2. 3. 1894. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. IV. Ser. Vol. 8, No. 3. 1894. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Mannheim:

56.—60. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

Universitäts-Bibliothek in Marburg:

Schriften der Universität Marburg a. d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Hennebergischer alterthumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge. Lieferung XIII. 1894. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Band 3, Heft 2. 3. 1893. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. 73ᵉ année 1891/92. 1894. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. 5. Jahrgang, 2. Hälfte. 1894. 4⁰.

Observatorio meteorologico central in Mexico:

Boletin. Mensual. Tomo III, No. 5. 1894. 4⁰.

Sociedad cientifica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias. Tomo VII, No. 11—12. 1894. 8⁰.

Sociedad de geografia y estadistica in Mexico:

Boletin. IVª época. Tomo 2, No. 11. 12. Tomo 3, No. 1. 2. 1894. 8⁰.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Ser. III. Vol. XII, Anno 27, fasc. 3. 1894. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. 1894. No. 2. 8⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:

Die Büchersammlung der städtischen Kollegien Münchens. 1894. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie und Urgeschichte in Berlin und München.

Correspondenzblatt. 1894. No. 6-8. München. 4⁰.

K. Technische Hochschule in München:

Programm für das Studienjahr 1894/95. 1894. 8⁰.
Bericht für das Studienjahr 1893/94. 1894. 4⁰.
Personalstand. Winter.-Sem. 1894/95. 1894. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Amtsblatt der Erzdiöcese München und Freising. No. 15—23. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:

Geognostische Jahreshefte. Jahrg. VI. 1893. Cassel 1894. gr. 8⁰.
5. Bericht über die Thätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt. Berlin 1894. 8⁰.

Universität in München:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1894 in 4⁰ u. 8⁰.

Aerztlicher Verein München:

Sitzungsberichte. III. 1893. 1894. 8⁰.

Bayerischer Dampfkessel-Revisions-Verein in München:

24. Jahresbericht 1893. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in München:

Monatsschrift. 1894. No. 7—12. Juli—Dezember. 8⁰.
Oberbayerisches Archiv. Band 48, Heft 1. 2. 1893/94. 8⁰.

Westfälischer Provinzialverein in Münster:

21. Jahresbericht für 1892/93. 1893. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche in Neapel:

Rendiconto. Serie II. Vol. VIII, fasc. 8—10. 1894. 4⁰.

Società Reale in Neapel:

Atti della R. Accademia di scienze morali e politiche. Vol. 26. 1893/94. 8⁰.
Rendiconto dell' Accademia di scienze morali e politiche. Anno 31. 32. 1892/93. 8⁰.
Atti della R. Accademia delle scienze fisiche. Ser. II. Vol. 6. 1894. 4⁰.
Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche. Ser. II. Vol. 8. fasc. 6 e 7. 1894. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. XI, 3. Berlin 1894. 8⁰.

American Journal in New-Haven:

The American Journal of Science. Vol. 48, No. 283—288. July—December. 1894. 8⁰.

Observatory of the Yale University in New-Haven:

Report for the year 1893/94. 1894. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Proceedings at New-York. March 29—31. 1894. 8⁰.

North of England Institute of Mining and Mechanical Engineers in Newcastle-upon-Tyne:

Transactions. Vol. 43, No. 5. 6. Vol. 44. No. 1. 1893/94. 8⁰.
Annual Report of the Council for 1893/94. 1894. 8⁰.
Report of the Proceedings of the flameless explosives Committee. Part I. 1894. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. VIII, No. 4. 1894. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Annual Report for the year 1893. 1894. 8⁰.

State Museum in New-York:

45th and 46th annual Report for the year 1891 and 1892. Albany. 1892/93. 8⁰.
Bulletin. Vol. 3, No. 11. Albany 1893. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:

The Journal. Vol. XVI, No. 6—12. Easton 1894. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 26, No. 2, 3. 1894. 8⁰.

Nederlandsch Botanische Vereeniging in Nijmegen:

Nederlandsch kruidkundig Archief. II. Ser. Deel VI, Stuk 3. 1894. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. Band X, Heft 2. 1894. 8⁰.

Komité für die Hans-Sachs-Feier in Nürnberg:

Hans Sachs zum 400 jährigen Geburtsjubiläum des Dichters. Von Ernst Mummenhoff. 1894. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Tom. XVIII, 2. 1894. 8⁰.

Organisation de l'étude climaterique de la Russie par Klossovsky. 1894. 4⁰.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. Vol. XI, for the year 1893. 1894. 4⁰.

The Radcliffe Observatory in Oxford:

Radcliffe Catalogue of Stars 1890. 1894. 4⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Ser. II. Vol. 2, fasc. 1. 1895. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. VIII, 5. 6. 1894. gr. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Annata 17. 1894. Gennaio—Aprile. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1894, No. 27—51. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 119, No. 1—25. 1894. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome XXII, No. 5—8. 1894. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Bulletin. VII. Sér. Tom. 15. 1er et 2e trimestre. 1894. 8⁰.

Comptes rendus 1894, No. 14—17. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. 4e Sér. Tome VIII, 2e partie, livre 631—636. Juillet—Déc. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „L'Électricien" in Paris:

L'Électricien. 2e Sér. Tome VIII, No. 184—208. Paris 1894. 4⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Bulletin. Nouv. Sér. Tome IV, No. 1. 2. 1894. 4⁰.

Bulletin. Ve Série. Tome I, No. 1—3. 1894. 4⁰.

Mémoires. Tom. 39. 41, No. 6—9. 42, No. 1—11. 1893/94. 4⁰.

Byzantina Chronika. Tom. 1, Heft 1. 1894. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XII, No. 3—7 et Supplement au T. XII. 1893. 8⁰.

Mémoires. Vol. IV, No. 3. 1893. 4⁰.

Kais. russ. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Band XIII. 1893. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:
Schurnal. Tom. XXVI, 4—7. 1894. 8⁰.

Société des naturalistes in St. Petersburg:
Travaux. Section de Botanique. Vol. XXIV. 1893/94. 8⁰.
Chemitscheskaja Laboratoria. 1894. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:
Sapiski. Tom. 34. 1894. 8⁰.
Uebersicht der Wirksamkeit der naturwissenschaftlichen Gesellschaft in St. Petersburg 1868—1893. (In russ. Sprache.) 1893. 8⁰.
Oboscenie. (Vorlesungskatalog 1894/95.) 1894. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:
Proceedings. 1894, part I. 1894. 8⁰.

The Oriental Club of Philadelphia:
Oriental Studies. 1888—1894. Boston 1894. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:
The Pennsylvania Magazine. Vol. 18, No. 1. 1894. 8⁰.

American philosophical Society in Philadelphia:
Proceedings. Vol. 33, No. 144. 145. 1894. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:
Atti. Processi verbali. Vol. IX, pag. 63—132. 1894. 4⁰.

Alterthums-Verein in Plauen:
Mittheilungen. 10. Jahresschrift auf die Jahre 1893/94. 1893. 8⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:
Polhöhenbestimmungen im Harzgebiet. 1887—1891. Berlin 1894. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josefs Akademie in Prag:
Rozprawy. Třida II. Ročnik III, čislo 1. 2. 1894. 4⁰.
„ III. „ III. „ 2.
Historický Archiv. Čislo 4. 5. 1894. 4⁰.
Bulletin international. Cl. des sciences mathém. I. 1894. 4⁰.
Věstník. Ročník III. čislo 6. 1894. 4⁰.
Sbïrka pramenůo etc. Skupina I. Rada 2. Čislo 1. 1894. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen in Prag:
Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens im Jahre 1892. 1894. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:
Časopis. Band 23, Heft 3—5. 1894. 8⁰.

K. böhmisches Museum in Prag:
Památky archaeologické a místopisné. Bd. XVI, 3—6. 1893. 4⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:
Magnetische und meteorologische Beobachtungen im Jahre 1893. 54. Jahrg. 1894. 4⁰.

K. K. deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:
Ordnung der Vorlesungen. Winter-Sem. 1894/95. 8⁰.
Personalstand. Studienjahr 1894/95. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. Jahrg. 32. No. 1—4. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. Bd. 46. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. IV. Heft. 1894. 8⁰.

Instituto historico e geographico in Rio de Janeiro:

Revista trimensal. Tomo 56, parte 1. 1893. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. 5. 1894. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. II, parte 2. Notizie degli scavi. Gennaio—Agosto. 1894. 4⁰.

Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. III. Semestre 1, fasc. 12, Semestre 2, fasc. 1—8. 1894. 4⁰.

Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol 3, fasc. 5—9. 1894. 8⁰.

Rendiconti dell' adunanza solenne del 3 Giugno. 1894. 4⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 47. Sessione I. II. III. 1894. 4⁰.

Biblioteca Apostolica Vaticana in Rom:

Studi e documenti di storia e diritto. Anno XIV, fasc. 1—4. 1893. 4⁰.

Codices manuscripti graeci Ottoboniani Bibliothecae Vaticanae, recensuerunt E. Feron et F. Battaglini. 1893. 4⁰.

Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1894, No. 2. 3. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut in Rom:

Mittheilungen. Römische Abtheilung. Band IX, 2. 3. 1894. 8⁰.

Società Italiana delle scienze in Rom:

Memorie di Matematica. Serie III. Vol. 8. 9. Napoli 1892/93. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XVII, fasc. 1. 2. 1894. 8⁰.

Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:

Annali. Vol. XXII, parte 1. 1890. Vol. XIV, p. 1. 1892. Vol XV, p. 1. 1893. 1894. 4⁰.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Lick Observatory of the University of California in Sacramento:

Publications. Vol. II. 1894. 4⁰.

Academy of Science in St. Louis:

Transactions. Vol. VI, No. 9—17. 1893/94. 8⁰.

Essex Institute in Salem:

Bulletin. Vol. 26. 1894. 8⁰.

K. K. Staats-Gymnasium in Salzburg:

Programm für das Jahr 1893/94. 1894. 8⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mittheilungen. 34. Vereinsjahr. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:

Mittheilungen zur vaterländischen Geschichte. XXV. 1894. 8⁰.
Urkundenbuch der Abtei St. Gallen. Theil IV, 3. 1894. 4⁰.
Abt Berchtold von Falkenstein von Placid Bütler. 1894. 4⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadix:

Almanaque náutico para 1895. Madrid 1894. 8⁰.

Geographical Society of California in San Francisco:

Bulletin. Vol. II. 1894. May. 8⁰.

Observatorio astronómico in San Salvador:

Observaciones meteorologicas. Oct.—Dez. 1892. 1894. 8⁰.

Société scientifique du Chili in Santiago:

Actes. Tome 3, livr. 4. 5. Tome 4, livr. 1. 2. 1894. 4⁰.

Commissão geographica e geologica i São Paulo (Brasilien):

Boletin. Dados climatologicos. 1890—1892. 3 Hefte. 1893. 8.

Contribuções para a archeologia. Heft 1. 1893. 8⁰.

Histor. Verein für das Württembergische Franken in Schwäbisch-Hall:

Württembergisch Franken. Neue Folge V. 1894. 8⁰.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher. 59. Jahrgang. 1894. 8⁰.

China Branch of the Royal Asiatic Society in Shanghai:

Journal. N. S. Vol. 26. 1891/92. 1894. 8⁰.

Meteorologische Centralstation in Sophia (Bulgarien):

Bulletin mensuel météorologique de Bulgarie. 1894. Jan.—Sept. 4⁰.

Bosnisch-Herzegovinisches Landesmuseum in Sarajevo:

Die prähistorischen Fundstätten von V. Radimský. 1891. 4⁰.
Römische Strassen in Bosnien und der Hercegovina von Ph. Ballif. Th. I. Wien 1893. fol.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di archeologia. Anno 17. 1894. No. 5—7. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speier:

Mittheilungen. XVIII. 1894. 8⁰.

Schwedische Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Handlingar. Band 25. Heft 1. 2. 1892—94. 4⁰.
Bihang till Handlingar. Band XIX in 4 Abtheil. 1894. 8⁰.
Meteorologiska iakttagelser. Bd. 32. (1890.) 1894. 4⁰.
Lefnadstockningar. Band III, 2. 1894. 8⁰.

K. öffentliche Bibliothek in Stockholm:

Sveriges offentliga bibliotek Accessions-Katalog VIII. 1893. 1894. 8⁰.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tome 28, fasc. 5. 6. 1894. 8⁰.

Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Australasian Association for the Advancement of Science in Sydney:

Report. Vol. V. Adelaide Session. 1893. 8⁰.

Department of Mines in Sydney:

Records of the Geological Survey of New-South-Wales. Vol. IV, part 1. 1894. 4⁰.

Geological Survey of New-South-Wales in Sydney:

Records. Vol. IV, part 2. 1894. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico):

Boletin. Tom. I, No. 17—19. 1894. 4⁰.
Anuario. Año XV. México. 1894. 4⁰.

College of Science, Imperial University, Japan, Tokio.

The Journal. Vol. VI, 4. VII, 1. VIII, 1. 1894. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio:

Mittheilungen. Band VI. Suppl. Heft 1. Heft 54. 1894. fol.

Tufts College Mass.:

Tufts College Studies No. III. 1894. 4⁰.

Universitäts-Bibliothek in Tübingen:

Schriften der Universität Tübingen a. d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 29, disp. 11—15. 1894. 8⁰.
Memorie. Ser. II, tom. 44. 1894. 4⁰.

Comité météorologique international in Upsala:

Extrait des procès-verbaux de la Ire réunion à Upsal en Août 1894. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Upsala:

Nova Acta. Ser. III. Vol. XVI. 1893. 4⁰.

Universität in Upsala:

Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Société provinciale des Arts et Sciences in Utrecht:

Verslag. 1893. 8⁰.
Aanteekeningen van Sectie-vergaderingen. 1893. 8⁰.
L. A. van Langeraad, De Nederlandsche Ambassade-Kapel te Parijs. 2. Voll. s'Gravenhage. 1893. 8⁰.

American Historical Association in Washington:

Annual Report for the year 1892 and 1893. 1893/94. 8⁰.

Bureau of Ethnology in Washington:

Tenth annual Report 1888—89, by J. W. Powell. 1893. 4⁰.
The Maya Year, by Cyrus Thomas. 1894. 8⁰.
Bibliography of the Wakashan Languages, by F. C. Pilling. 1894. 8⁰.
The Pamunkey Indians of Virginia, by J. H. Pollard. 1894. 8.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report, to July 1892. 1893. 8⁰.

Surgeon General, U. S. Army in Washington:

Index Catalogue. Vol. XV. 1894. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 27. Jahrg. 1894. 8⁰.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Mittheilungen aus dem Vatikanischen Archive. Band II. 1894. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1894. No. 5—9. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1894. No. 27—52. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 24, Heft 3—5. 1894. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Jahrg. 1894. Band 44, I. u. II. Quartal. 8⁰.

Oesterreichische Gradmessungs-Kommission in Wien:

Verhandlungen über die am 11. und 13. April 1894 abgehaltenen Sitzungen. 1894. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band IX, No. 2. 1894. 4⁰.

v. Kuffnerische Sternwarte Wien:

Publikationen. Band III. 1894. 4⁰.

K. K. Universität in Wien:

Jahrbuch für das Studienjahr 1893/94. 1894. 8⁰.
Uebersicht der akademischen Behörden für das Studienjahr 1894/95. 1894. 8⁰.
Oeffentliche Vorlesungen. Sommer-Sem. 1894. Winter-Sem. 1894/95. 1894. 8⁰.
Die feierliche Inauguration des Rektors am 8. Nov. 1894. 8⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 34. Bd. Jahrg. 1893/94. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein an der Universität Wien:

Mittheilungen für das Jahr 1893/94. 1894. 8⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 1847. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 39, Heft 2. 1894. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Franz Ludwig Baumann in Donaueschingen

Geschichte des Allgäus. Band III. Kempten 1894. 8°.

A. Brill in Tübingen

Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen. Berlin 1894. 8°.

Franz Buecheler in Bonn

Anthologia latina. Pars II. Fasc. I. Leipzig 1895. 8°.

Hermann [illegible] in [illegible]

Litteratura regni [illegible]. 1894. 8°.

[illegible] in [illegible]

Ricerche sull' antica [illegible] dei [illegible]. 1894. 8°.

[illegible] in [illegible]

Saggio di una [illegible] normale dei [illegible]. 1893. 8°.

R. Fresenius in Wiesbaden

Ueber die Veränderungen im Gehalte des Mineralwasser. 1894. 8°.

Ernst Haeckel in Jena

Systematische Phylogenie der Protisten und Pflanzen. Th. I. Berlin 1894. 8°.

[illegible] in [illegible]

Die Weltordnung. Köln 1894. 8°.

[illegible] in [illegible]

[illegible] Separatabdrücke aus dem [illegible] der [illegible] physikalischen [illegible]. 1894. 8°.

[illegible] in [illegible]

Introduction [illegible]. 1894. 8°.

[illegible] in [illegible]

[illegible] Hofmann. 1894. 8°.

[illegible] in Konstanz

Separatabdrücke [illegible]. 1894. 8°.

[illegible] in London

In the [illegible]. 1893. 8°.

Friedrich [illegible] in [illegible]

Hans Sachsens [illegible] Meistergesang. Nürnberg 1894. 8°.

[illegible] in [illegible]

Der [illegible]. 1894. 8°.

Ueber den [illegible]. 1894. 8°.

Ueber die [illegible]. 1894. 8°.

[illegible]

[illegible] Abhandlungen [illegible]. 1894. 8°.

G. Lorentzen in Bamberg:

Ueber die Untersuchung der Scalen eines Heliometers. 1894. 8⁰.

Se. Hoheit Prinz Albert von Monaco in Monaco:

Résultats des Campagnes scientifiques. fasc. VII. 1894. gr. 4⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tome 56, No. 1. 2. Paris 1894. 8⁰.

Gifford Pinchot in New-York:

Biltmore Forest, the property of Mr. George W. Vanderbilt. Chicago 1893. 8⁰.

S. Riefler in München:

Die Präcisions-Uhren. 1894. gr. 8⁰.

Andreas Schmid in München:

Geschichte des Georgianums in München. Regensburg 1894. 8⁰.
Festbericht über die IV. Centenarfeier des Georgianums. Augsburg 1894. 8⁰.

August Tischner in Leipzig:

Le pouvoir grossissant de l'atmosphère. 1892. 8⁰.

Albrecht Weber in Berlin:

Vedische Beiträge. 1894. 4⁰.

Henry Wilde in London:

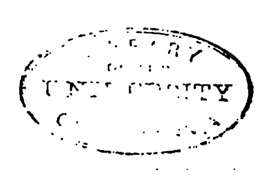
Ueber den Ursprung der elementaren Körper und über einige neue Beziehungen ihrer Atomgewichte. London 1892. 4⁰.

A. Wolfer in Zürich:

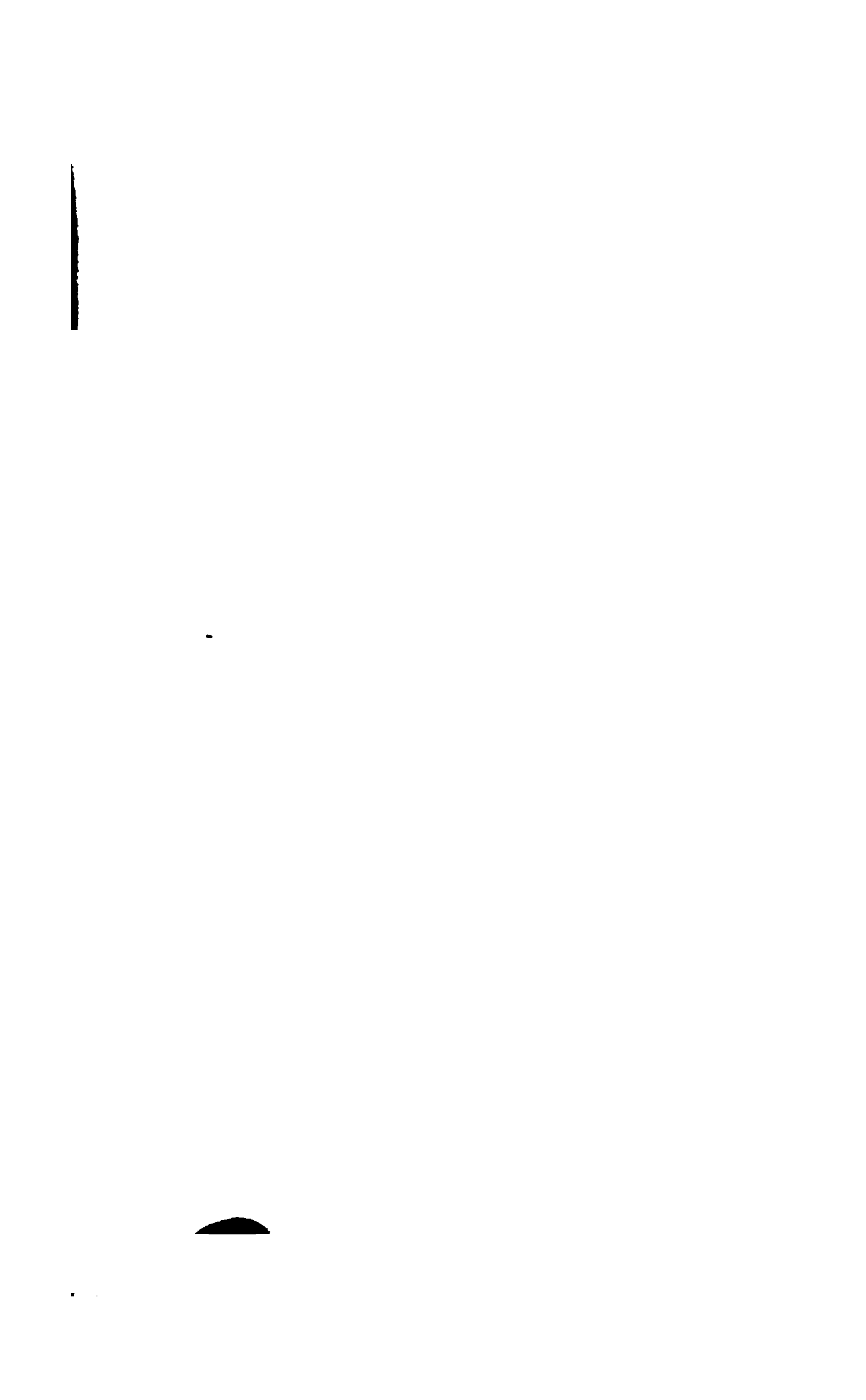
Astronomische Mittheilungen. No. 84. 1894. 8⁰.

Namen-Register.

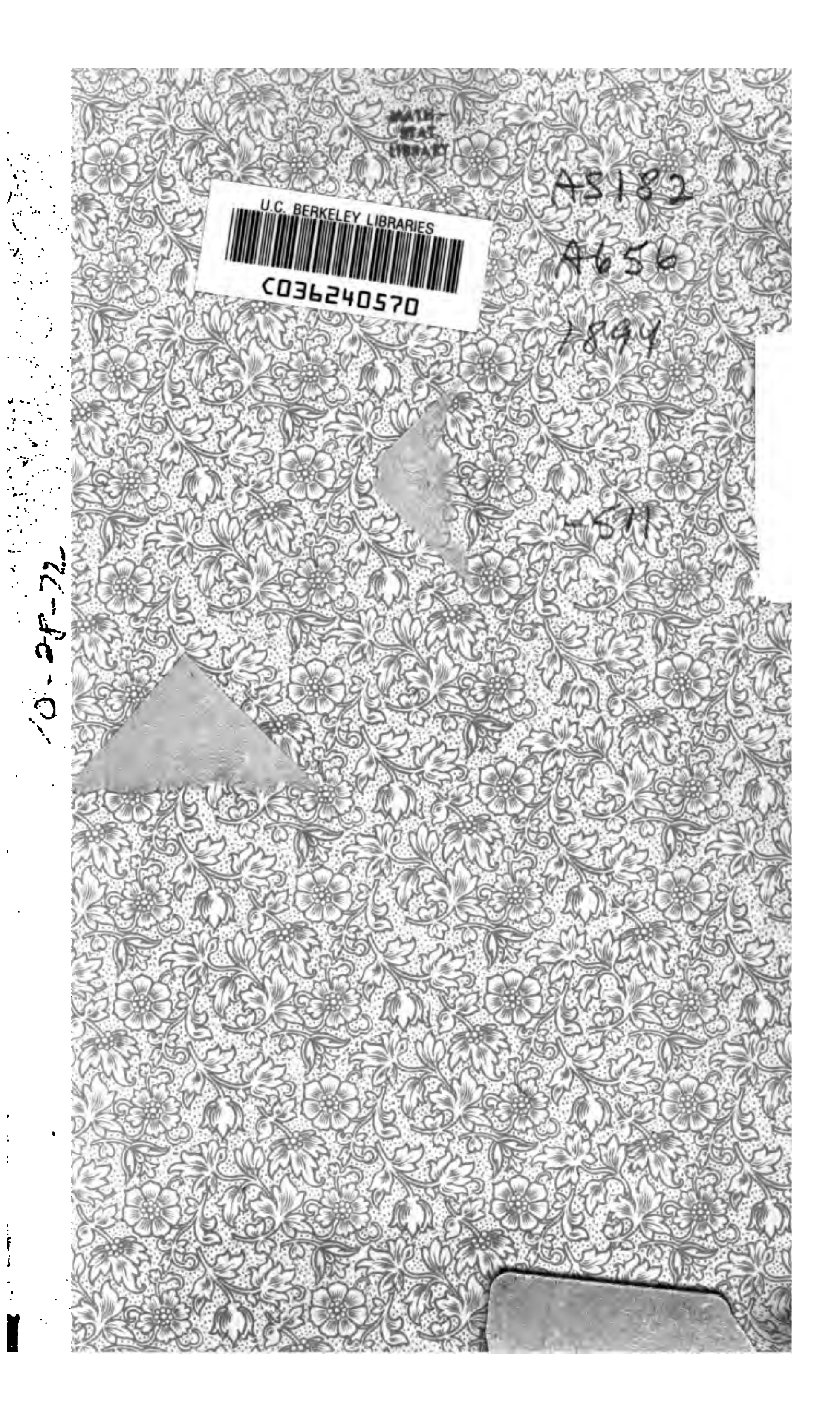
Sach-Register.










MATH-STAT. LIBRARY
U.C. BERKELEY LIBRARIES
C036240570
AS182
A656
1894

